

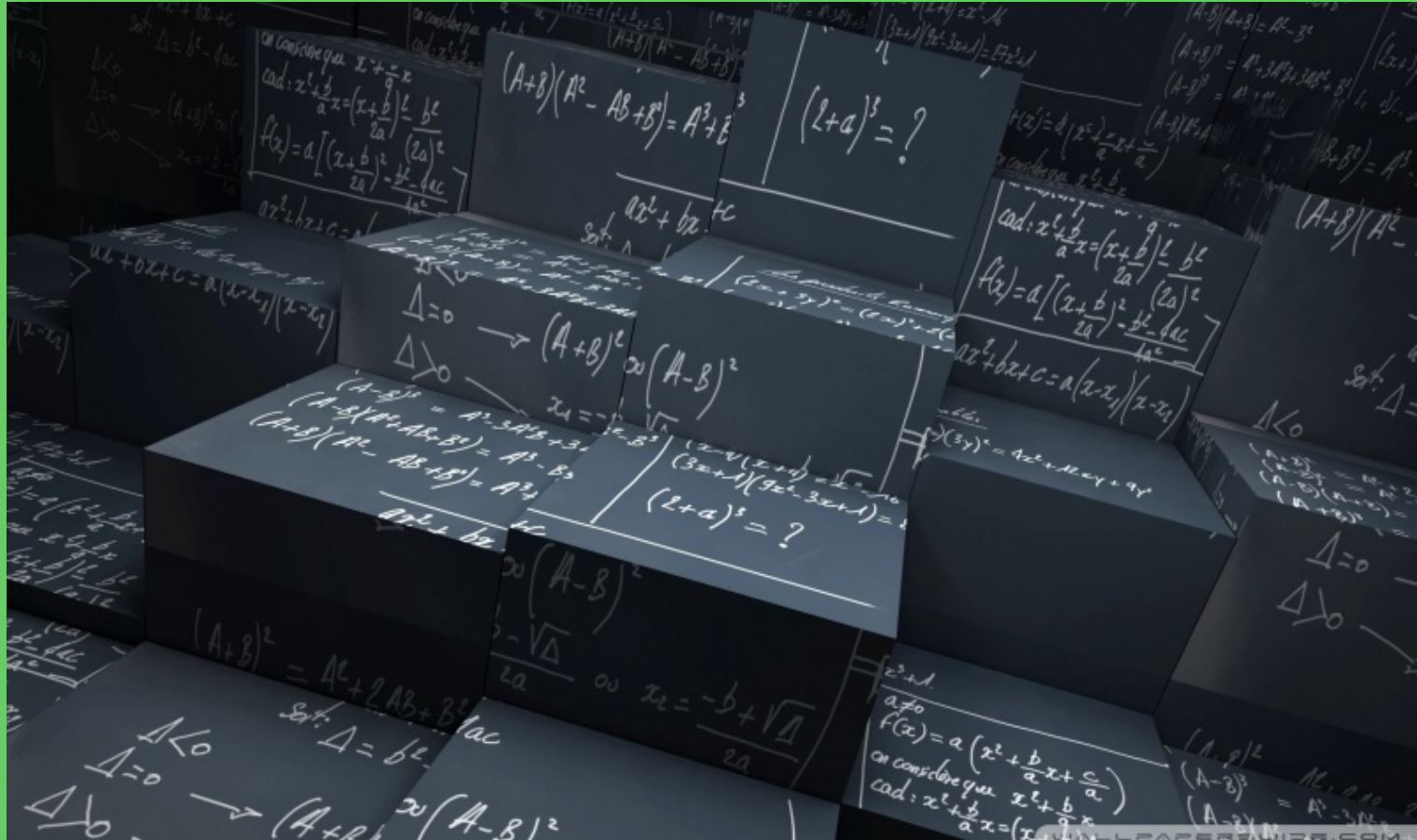
CRISP

Center for Research
in Security and Privacy



Open C³S

Open Competence Center for Cyber Security



Bachelorstudiengang Informatik/IT-Sicherheit

Mathematik 1 [MAT1]

Autoren:

Prof. Dr. Harald Baier

Jessica Steinberger

CRISP

Mathematik 1

[MAT1]

Studienbrief 1: Mengen und Zahlen

Studienbrief 2: Einführung in die Logik und Beweisverfahren

Studienbrief 3: Zahlentheorie und modulare Arithmetik

Studienbrief 4: Vektoren und Vektorräume

Studienbrief 5: Matrizen

Autoren:

Prof. Dr. Harald Baier

Jessica Steinberger

3. Auflage

CRISP

© 2018 CRISP

Hochschule Darmstadt

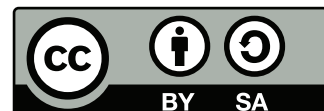
Fachbereich Informatik

Schöfferstraße 8b

64295 Darmstadt

3. Auflage (1. Oktober 2017)

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons „Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland“](#) Lizenz.



Um die Lesbarkeit zu vereinfachen, wird auf die zusätzliche Formulierung der weiblichen Form bei Personenbezeichnungen verzichtet. Wir weisen deshalb darauf hin, dass die Verwendung der männlichen Form explizit als geschlechtsunabhängig verstanden werden soll.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung zu den Studienbriefen	5
I. Abkürzungen der Randsymbole und Farbkodierungen	5
II. Zu den Autoren	6
III. Modullehrziele	7
Studienbrief 1 Mengen und Zahlen	17
1.1 Lernergebnisse	17
1.2 Advance Organizer	17
1.3 Grundlagen der Mengenlehre	17
1.4 Operationen auf Mengen	21
1.5 Die reellen Zahlen	25
1.6 Komplexe Zahlen	29
1.6.1 Addition/Subtraktion komplexer Zahlen	30
1.6.2 Potenzen der imaginären Einheit	32
1.6.3 Multiplikation komplexer Zahlen	33
1.6.4 Betrag komplexer Zahlen	34
1.6.5 Konjugiert komplexe Zahlen	35
1.6.6 Division komplexer Zahlen	36
1.6.7 Darstellungsformen komplexer Zahlen	37
1.7 Zusammenfassung	44
1.8 Übungsaufgaben	46
Studienbrief 2 Einführung in die Logik und Beweisverfahren	49
2.1 Lernergebnisse	49
2.2 Advance Organizer	49
2.3 Aussagenlogik	49
2.3.1 Propositionen	52
2.3.2 Tautologie, Kontradiktion und logische Äquivalenz	54
2.3.3 Bedingte Aussagen	58
2.4 Prädikatenlogik	62
2.5 Beweisverfahren	64
2.5.1 Direkter Beweis	65
2.5.2 Beweis durch Kontraposition (Indirekter Beweis)	65
2.5.3 Beweis durch Widerspruch	66
2.5.4 Beweis der vollständigen Induktion	67
2.6 Übungsaufgaben	70
Studienbrief 3 Zahlentheorie und modulare Arithmetik	73
3.1 Lernergebnisse	73
3.2 Advance Organizer	73
3.3 Elementare Zahlentheorie	73
3.4 Restklassen	77
3.5 Gruppen und die additiven Restklassengruppen	81
3.6 Multiplikative Restklassengruppen	85
3.7 Schnelle Exponentiation	89
3.8 RSA	92
3.9 Zusammenfassung	95
3.10 Übungsaufgaben	96
Studienbrief 4 Vektoren und Vektorräume	97
4.1 Lernergebnisse	97
4.2 Advance Organizer	97
4.3 Vektoren in der Menge $\mathbb{R}^3$	97

4.4	Operationen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$	100
4.4.1	Vektoraddition im $\mathbb{R}^3$	100
4.4.2	Skalarmultiplikation	102
4.5	Linearkombination und lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$	106
4.6	Das Skalar- und Kreuzprodukt	110
4.6.1	Skalarprodukt	110
4.6.2	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	114
4.7	Allgemeine Vektorräume	119
4.8	Zusammenfassung	123
4.9	Übungsaufgaben	124
Studienbrief 5 Matrizen		127
5.1	Lernergebnisse	127
5.2	Advance Organizer	127
5.3	Grundlagen von Matrizen	128
5.4	Transponierte und konjugiert Transponierte einer Matrix	131
5.5	Spezielle quadratische Matrizen	133
5.6	Rechenoperationen mit Matrizen	136
5.6.1	Addition von Matrizen	137
5.6.2	Skalarmultiplikation von Matrizen	138
5.6.3	Matrixmultiplikation	139
5.7	Determinanten	142
5.8	Die Inverse einer Matrix	155
5.9	Zusammenfassung	159
5.10	Übungsaufgaben	160
Liste der Lösungen zu den Kontrollaufgaben		163
Verzeichnisse		183
I.	Abbildungen	183
II.	Beispiele	183
III.	Definitionen	185
IV.	Exkurse	186
V.	Kontrollaufgaben	186
VI.	Sätze	187
VII.	Tabellen	188
VIII.	Literatur	188
Liste der Lösungen zu den Übungen		191
Anhang		229
A.	Lizenztext	229
Stichwörter		235

Einleitung zu den Studienbriefen**I. Abkürzungen der Randsymbole und Farbkodierungen**

Axiom	A
Beispiel	B
Definition	D
Exkurs	E
Kontrollaufgabe	K
Merksatz	M
Quelltext	Q
Satz	S
Übung	Ü

II. Zu den Autoren



Harald Baier promovierte 2002 an der TU Darmstadt über eine Arbeit zur effizienten Erzeugung elliptischer Kurven. Er war Mitarbeiter in einem Sicherheitsprojekt der Deutsche Bank AG und baute das Darmstädter Zentrum für IT-Sicherheit auf. Nach einer Professorentätigkeit an der FH Bingen (2004-2009) ist er seit 01.04.2009 an der Hochschule Darmstadt auf dem Gebiet der Internet-Sicherheit tätig. Schwerpunkte seiner Arbeit sind Computerforensik, Anomaliedetektion sowie Sicherheitsinfrastrukturen.



Jessica Steinberger absolvierte eine Ausbildung zur Fachinformatikerin für Systemintegration und beendete diese im Jahr 2003. Anschließend begann sie ihr Studium an der Fachhochschule Bingen und schloss das Studium Bachelor of Science Informatik im Jahr 2009 ab. Darauf folgte das Studium Master-Studiengang Informationssysteme, welches sie im Jahr 2011 beendete. Seit 2011 ist sie Mitarbeiterin der Forschungsgruppe da/sec - Biometrics and Internet Security Research Group der Hochschule Darmstadt.

III. Modullehrziele

Die Studierenden sollen

- die Arithmetik reeller und komplexer Zahlen verstehen und anwenden können.
- die Grundbegriffe der Zahlentheorie kennen und anwenden können.
- mit den Begriffen Teilbarkeit und Primzahlen umgehen können.
- effizient modular potenzieren können.
- das RSA-Kryptosystem kennen und die zugrundeliegende Sicherheit bewerten.
- die Definition des Begriffs „Vektorraum“ kennen und diese auf konkrete Vektorräume anwenden können.
- den Umgang mit Vektoren und Matrizen verstehen.
- durch eine geeignete Auswahl an Vorgehensweisen und Präsentationstechniken ihre Ergebnisse entsprechend darstellen können.
- durch Teamarbeit, unter anderem an den Präsenzwochenenden, ihre Teamfähigkeit und Sozialkompetenz erweitern.

Modulbeschreibung

Modulbezeichnung:	Mathematik 1 (Mathematics 1)
Verwendbarkeit:	Bachelorstudiengang Informatik/IT-Sicherheit (Pflichtmodul)
Lehrveranstaltungen und Lehrformen:	Mathematik 1 Selbstlernphasen, Übungen, Online-Phasen, Präsenzveranstaltung
Modulverantwortliche(r):	Prof. Dr. Harald Baier
Lehrende:	Prof. Dr. Harald Baier
Dauer:	1 Semester
Credits:	5 ECTS-Punkte
Studien- und Prüfungsleistungen:	Klausur: 60 min.
Berechnung der Modulnote:	100% der schriftlichen Prüfungsnote
Notwendige Voraussetzungen:	keine
Empfohlene Voraussetzungen:	Mathematik Gymnasium Oberstufe
Unterrichts- und Prüfungssprache:	Deutsch
Zuordnung des Moduls zu den Fachgebieten des Curriculums:	Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlagen
Einordnung ins Fachsemester:	Ab Studiensemester 1
Arbeitsaufwand bzw. Gesamtworkload:	Präsenzstudium: 30 Zeitstunden Fernstudienanteil: 120 Zeitstunden • Selbststudium: 90 Zeitstunden • Aufgaben: 20 Zeitstunden • Online-Betreuung: 10 Zeitstunden Summe: 150 Zeitstunden
Lerninhalte:	In diesem Modul werden die folgenden Themengebiete behandelt: • Mengen • Elementare Aussagenlogik • Beweisverfahren • Reelle und komplexe Zahlen • Zahlentheorie und modulare Arithmetik • Vektoren und Vektorräume (Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$, Begriff des Vektorraums, Beispiele für Vektorräume) • Matrizen, Determinanten

Angestrebte Lernergebnisse:	<i>Fachkompetenz:</i> Die Studierenden können die Arithmetik reeller und komplexer Zahlen erläutern und diese anwenden. Des Weiteren kennen Sie die Grundbegriffe der Zahlentheorie sowie der modularen Arithmetik und können mit diesen umgehen, insbesondere effizient modular Potenzieren. Darüber hinaus kennen Sie das RSA-Kryptosystem und erlangen Wissen über die zugrundeliegende Sicherheit. Sie können den Begriff 'Vektorraum' erklären und können diesen auf konkrete Vektorräume anwenden. Darüber hinaus sind Sie in der Lage, mit Vektoren und Matrizen zu rechnen, insbesondere Matrizen zu invertieren. <i>Methodenkompetenz:</i> Die Studierenden erwerben die Fähigkeit, mit den Lehrinhalten des Moduls aktiv umgehen zu können und können Fragestellungen, Aufgaben und Probleme, die sich aus der Lehrveranstaltung ergeben, selbstständig bearbeiten und lösen. <i>Sozialkompetenz:</i> Die Studierenden können durch Gruppenarbeit an den Präsenzwochenenden Übungsaufgaben kooperativ lösen und in Teams arbeiten. Darüber hinaus besitzen sie die Fähigkeit, in komplexen Situationen zu handeln und Lösungen für Aufgabenstellungen zu entwickeln. <i>Selbstkompetenz:</i> Die Studierenden können aufgrund der Teamarbeit problemorientiert diskutieren. Sie haben die Fähigkeit, sich eine Meinung über die Themen von Mathematik 1 zu bilden und können das erlangte Wissen im Bereich der Informatik einsetzen.
Häufigkeit des Angebots:	Wintersemester
Medienformen:	Studienbriefe in schriftlicher und elektronischer Form, Onlinematerial in Lernplattform, Übungen und Projekt über Lernplattform, Online-Konferenzen, Chat und Forum, Präsenzveranstaltung mit Rechner und Beamer.

Literatur:	Als begleitende und vertiefende Literatur wird empfohlen: • Teschl, G.; Teschl, S.: Mathematik für Informatiker Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra, Springer-Verlag, ISBN 978-3-642-37972-7, Springer; Auflage: 4 • Teschl, G.; Teschl, S.: Mathematik für Informatiker Band 2: Analysis und Statistik, Springer-Verlag, ISBN 978-3-642-54274-9, Springer; Auflage: 3 • Arens, T.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Kockelkorn, U.; Lichtenegger, K.; Stachel, H.: Mathematik, Springer-Verlag, ISBN: 978-3-827-42347-4, Springer; Auflage: 2 • Arens, T.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Kockelkorn, U.; Lichtenegger, K.; Stachel, H.: Arbeitsbuch Mathematik - Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege, Springer-Verlag, ISBN: 978-3-827-42410-5, Springer; • Arens, T.; Busam, F.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Stachel, H.; Lichtenegger, K.: Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen, Springer-Verlag, ISBN: 978-3-827-42309-2, Springer; • Houston, K.: Wie man mathematisch denkt - Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger, Springer Spektrum, ISBN: 978-3-8274-2997-1; Springer
------------	---

Mathematische Zeichen

Beziehungszeichen

$=$	gleich	$\approx$	ungefähr gleich
$\leq$	kleiner oder gleich	$<$	kleiner
$>$	größer	$\geq$	größer oder gleich
$\neq$	ungleich		

Konstanten

const	konstante Größe (Konstante)	π	Verhältnis des Kreisumfanges zu Kreisdurchmesser
e	Eulersche Zahl		

Logik

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	Aussagen	$\bar{\mathcal{A}}, \neg \mathcal{A}$	Negation der Aussage $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	Konjunktion, logisches UND	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	Disjunktion, logisches ODER
$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Implikation, WENN $\mathcal{A}$, DANN $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	Äquivalenz, $\mathcal{A}$ GENAU DANN, WENN $\mathcal{B}$

Mengen und Quantoren

A, B, C	Mengen	$\bar{A}$	Komplementmenge von A
$A \subset B$	A ist (echte) Teilmenge von B	$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \setminus B$	Differenzmenge	$A \times B$	Kartesisches Produkt
$x \in A$	x ist Element von A	$x \notin A$	x ist nicht Element von A
$A \cap B$	Durchschnitt zweier Mengen	$A \cup B$	Vereinigung zweier Mengen
$\emptyset$	leere Menge	$\exists x$	es existiert ein Element x
$\forall x$	für alle Elemente x	$(a, b),]a, b[$	offenes Intervall
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	$[a, b), [a, b[$	rechtsoffenes Intervall
$(a, b],]a, b]$	linksoffenes Intervall		

Algebra

$\vec{a}$	Vektor	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren
$ \vec{a} $	Betrag, Länge des Vektors $\vec{a}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt	$\vec{0}$	Nullvektor
$\lambda \vec{a}$	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	Spatprodukt (gemischtes Produkt)
$\mathbf{A} = (a_{ij})$	Matrix $\mathbf{A}$ mit den Elementen a_{ij}	$\mathbf{A}^T$	transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse Matrix zu $\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^*$	konjugiert transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante der quadratischen Matrix $\mathbf{A}$	$\mathbf{E}_n$	$(n \times n)$ -Einheitsmatrix

Zahlenmengen

$\emptyset$	leere Menge	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
i, j	imaginäre Einheit	$\operatorname{Re}(z)$	Realteil der Zahl z
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil der Zahl z	$ z $	Betrag von z
z^*	konjugiert komplexe Zahl zu z		

Zahlentheorie

$a \mid b$	a teilt b	$a \nmid b$	a teilt b nicht
$a \equiv b \pmod n$	a ist kongruent zu b modulo n	p, q	Primzahlen
$\operatorname{ggT}(a, b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b	$\operatorname{kgV}(a, b)$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$(G, \circ)$	Gruppe G mit Verknüpfung $\circ$	$(\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der ganzen Zahlen bezüglich der Addition
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Restklassen modulo n	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der Restklassen modulo n bezüglich der Addition

Analysis

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	a ist Grenzwert der Folge a_n
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$	b ist Grenzwert der Funktion $f(x)$, wenn x gegen x_0 strebt
$\sum_{n=1}^k$	Summe mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\prod_{n=1}^k$	Produkt mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0
$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$	erste, zweite, $\dots$, n -te Ableitung der Funktion $f(x)$
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b
$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral der Funktion f

Stochastik

Ω	Ergebnismenge
A	Ereignis des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (es gilt $A \subset \Omega$)
$\bar{A}$	Gegenereignis zu A (d.h. $\bar{A} = \Omega \setminus A$)
$\mathcal{P}(\Omega)$	Menge aller Ereignisse des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (formal ist das die Potenzmenge von Ω)
$\Pr$	Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Ergebnismenge Ω
$\Pr(A B)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
$\bar{x}$	Arithmetisches Mittel einer gegebenen Datenmenge
R	Spannweite einer gegebenen Datenmenge
Q	Quartil einer gegebenen Datenmenge
IQR	Interquartilsabstand einer gegebenen Datenmenge
σ_x^2	Varianz einer Stichprobe
σ_x	Standardabweichung einer Stichprobe
$H(X)$	Entropie einer diskreten Zufallsvariablen X

Einleitung

Liebe Studierende,

herzlich willkommen zu dem Modul Mathematik 1 in dem Studiengang Bachelor Informatik/IT-Sicherheit.

Zunächst möchten wir Ihnen einige grundlegende Empfehlungen für das Lesen und die Bearbeitung der Studienbriefe geben. Lesen Sie die Studienbriefe mit Papier und Bleistift. Machen Sie sich Notizen über das Gelesene und halten Sie Gedanken, Fragen und Ideen fest. Wenden Sie das Gelesene auf Beispiele an und veranschaulichen Sie die Informationen in Zeichnungen und Grafiken. Verwenden Sie zunächst keinen Textmarker, sondern nur wenn Sie bereits den Studienbrief komplett gelesen haben, um tatsächlich nur die wichtigsten Informationen zu markieren.

Lesen Sie die Studienbriefe nicht wie einen Roman. Sie werden bei dem ersten Lesen nicht jedes Detail erfassen können. Daher ist es wichtig, in den Studienbriefen hin und her zu springen und Textpassagen mehrfach zu lesen, bis deren Bedeutung klar ist.

Seien Sie kritisch und stellen Sie Fragen. Verinnerlichen Sie das Gelesene, indem Sie sorgfältig lesen und versuchen, Gegenbeispiele für eine falsche Aussage zu finden. Bearbeiten Sie die Kontrollaufgaben sowie die begleitenden, umfangreichen Übungen am Ende des jeweiligen Studienbriefs, ohne auf die Lösungshinweise zu schauen. Nur so lässt sich das Gelesene verinnerlichen.

Weiterhin möchten wir Ihnen, bevor Sie mit der Durcharbeitung der Studienbriefe beginnen, einen kurzen Einblick in die Bedeutung der mathematischen Grundlagen für die Informatik geben und Sie dadurch für die intensive Bearbeitung der einzelnen Studienbriefe motivieren.

In dem Studienbrief 1 werden wir die komplexen Zahlen kennenlernen. Diese finden unter anderem ihre Anwendung in der Wavelettransformation, welche zur Detektion von auftretenden Frequenzen einer bestimmten zeitlichen Länge verwendet werden. Barford et al. [4] verwendet diese Eigenschaft der Wavelettransformation zum Auffinden von Anomalien im Netzwerkdatenverkehr.

Ein anschauliches Beispiel für die Anwendung der mathematischen Grundlagen aus diesem Modul in der Informatik stammt aus dem Aufgabenbereich der Kryptographie. Die Inhalte aus dem Studienbrief 3 finden unter anderem dort ihre Anwendung. Ein Ziel der Kryptographie ist es, dass Nachrichten nur vom vorgesehenen Empfänger gelesen sowie die Identität eines Absenders verifiziert werden kann. Hierzu wird insbesondere die algebraische Zahlentheorie eingesetzt, welche Sie in diesem Studienbrief kennen lernen.

In den Studienbriefen 4 und 5 werden wir Vektoren und Matrizen betrachten sowie deren Eigenschaften kennenlernen. Vektoren und Matrizen werden unter anderem für die Repräsentation von Graphen verwendet, welche bei der Routenplanung, Netzplänen, elektronischen Schaltungen sowie Gebäudeerkennungen aus Luftaufnahmen verwendet werden.

Neben der Vermittlung der mathematischen Grundlagen soll dieses Modul Ihre Fähigkeit des abstrakten und logischen Denkens sowie ihre klare und präzise Ausdrucksweise schulen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und Spaß bei dem Durcharbeiten der Studienbriefe. Gerne möchten wir Sie bei der (Wieder-)Entdeckung der Mathematik begleiten.

Jessica Steinberger und Harald Baier

Strukturelemente der Mathematik

Während der Durcharbeitung der Studienbriefe werden Ihnen immer wieder unterschiedliche Elemente begegnen, um die Ergebnisse zu strukturieren und darzustellen. Hierzu verwenden Mathematiker Sätze, Beweise, Definitionen sowie Axiome. Nachfolgend werden wir nun die Bedeutung der einzelnen Elemente beschreiben.

(Mathematischer) Satz

Bei einem mathematischen Satz (oder auch Theorem genannt) handelt es sich um eine sehr wichtige wahre und bewiesene Aussage. Typischerweise lassen wir das Adjektiv 'mathematisch' weg und sprechen nur von einem *Satz*.

Satz 0.1: Der große Satz von Fermat

Wenn die natürliche Zahl $n > 2$ ist, hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine natürlichen Zahlen x, y und z als Lösungen.

S

Beweis

Bei einem Beweis handelt es sich um eine Begründung, warum eine Aussage (zum Beispiel eines mathematischen Satzes) wahr ist. Das bedeutet, dass sich jede Aussage eines Satzes beweisen lassen muss. In einem Beweis werden zunächst die Voraussetzungen festgehalten, anschließend wird eine Behauptung formuliert und der eigentliche Beweis begonnen. Das Ende eines Beweises ist entweder mit „qed“ (quod erat demonstrandum) oder mit ■ gekennzeichnet.

Wir beweisen den nachfolgenden Satz wie folgt:

Satz 0.2

Es sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

S

Beweis durch Induktion:

Da wir die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen müssen, setzen wir $N_1 = 1$.

- *Induktionsanfang:* Für $N_1 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{N_1} k = 1$ und $\frac{N_1 \cdot (N_1 + 1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Also gilt die Behauptung des Satzes für $N_1 = 1$.
- *Induktionsvoraussetzung:* Es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
- *Induktionsschluss:* Es sei $n \geq 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^n k) + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1$. In der letzten Gleichung haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet. Es folgt $\frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. Der Induktionsschluss ist also gelungen.

Das zeigt die Richtigkeit des Satzes. ■

Beweise in diesem Studienbrief sind der Vollständigkeit halber aufgeführt und behandeln optionalen weiterführenden Stoff für Interessierte. Wir raten Ihnen dennoch, sich diese Elemente anzuschauen und nachzuvollziehen.

Definition

Eine Definition ist eine mathematische Erklärung eines neuen Begriffes. Definitionen können weder wahr noch falsch sein. Definitionen sind wohldefiniert und führen nicht zu Widersprüchen.

D**Definition 0.1: Wurzelfunktion**

Die Wurzelfunktion ist die Funktion, die jeder nicht negativen reellen Zahl x die nicht negative reelle Lösung y der Gleichung $x = y^2$ zuordnet.

Axiom

Axiome beschreiben mathematische Grundwahrheiten, für die es keinen Beweis gibt. Sie sind eine Art 'Grundwahrheiten' der Mathematik. Die Gesamtheit der Axiome heißt das *Axiomensystem*.

A**Axiom 0.1: Kleinstes Element einer nichtleeren Menge**

Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

Studienbrief 1 Mengen und Zahlen

1.1 Lernergebnisse

Nach dem Durcharbeiten dieses Studienbriefes kennen Sie die Grundlagen der Mengenlehre. Sie lernen auch die elementaren Zahlenmengen der natürlichen, ganzen, reellen sowie komplexen Zahlen kennen und anwenden. Sie können mit diesen Zahlen umgehen, insbesondere komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren sowie graphisch darstellen. Weiterhin wissen Sie um die Existenz verschiedener Darstellungsformen der komplexen Zahlen und sind in der Lage, eine gegebene komplexe Zahl von der einen Darstellungsform in eine andere Darstellungsform umzuformen.

1.2 Advance Organizer

Die komplexen Zahlen finden unter anderem ihre Anwendung in der Wavelettransformation, welche zur Detektion von auftretenden Frequenzen einer bestimmten zeitlichen Länge verwendet werden. Barford et al. [4] verwenden diese Eigenschaft der Wavelettransformation zum Auffinden von Anomalien im Netzwerkdatenverkehr. Die Detektion eines verteilten Netzangriffs (Denial of Service, DoS) ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

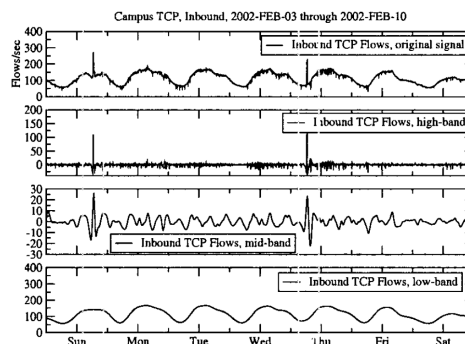


Abb. 1.1: Detektion einer DoS Angriffsanomalie [4]

Neben der Wavelettransformation finden die komplexen Zahlen ihre Anwendung bei der Bildverarbeitung, in der Physik (z.B. in den Maxwell'schen Gleichungen des Elektromagnetismus für Handy oder Fernseher), bei der Formulierung von physikalischen Verhalten, bei der Quantenphysik (z.B. Wellenfunktion der Quantenmechanik, welche u.a. bei dem DVD-Player seinen Einsatz findet), aber auch in der technischen Informatik.

1.3 Grundlagen der Mengenlehre

Der Begriff *Menge* spielt eine zentrale Rolle in der modernen Mathematik. Die heutige Mengenlehre geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück. Mathematisch korrekte Mengenlehre ist sehr kompliziert und hat in der Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts zu einer fundamentalen Krise geführt. Wir unternehmen daher nicht den Versuch, eine „saubere“ Mengenlehre zu behandeln. Vielmehr kommt es uns darauf an, dass Sie die wichtigsten Begriffe kennen und die wichtigsten Operationen auf Mengen beherrschen.

Menge

Was ist eine Menge? Eine exakte mathematische Definition ist sehr kompliziert. Georg Cantor beschreibt in seinem 1895 erschienen Aufsatz *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* Mengen wie in Definition 1.1 angegeben.

Was ist eine Menge?

D**Definition 1.1: Menge**

Unter einer Menge ist jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen zu verstehen.

Wohlunterschieden, ungeordnet

Hervorzuheben in der Beschreibung einer Menge nach Definition 1.1 ist der Begriff *wohlunterschieden*. Eine mehrfache Aufzählung desselben Objekts in einer Menge ist daher zwar zulässig, aber nicht sinnvoll. Es gilt z.B. $\{1, 1, 1\} = \{1, 1\} = \{1\}$. Weiterhin sind Mengen *ungeordnet*: es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Elemente aufgezählt werden. Es gilt also $\{1, 4, 7\} = \{1, 7, 4\} = \{4, 1, 7\} = \{4, 7, 1\} = \{7, 1, 4\} = \{7, 4, 1\}$.

Element

Mengen bestehen also aus unterschiedlichen Objekten, den *Elementen*. Ist das Objekt x ein Element irgendeiner Menge M , so wird dafür $x \in M$ geschrieben. Ist es aber nicht Element in der Menge M , so wird $x \notin M$ geschrieben.

B**Beispiel 1.1: Element**

Bezeichnet M die Menge aller Module des Bachelorstudienganges *Informatik / IT-Sicherheit* an der FAU und ist x das Modul *Mathematik 1*, so gilt $x \in M$. Bezeichnet aber M die Menge aller Module des Masterstudienganges *Informatik* an der Hochschule Darmstadt und ist x wieder das Modul *Mathematik 1*, so gilt $x \notin M$. In diesem Studiengang gibt es also kein solches Mathematikmodul.

Darstellungsformen

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen darzustellen: durch explizite Angabe der Elemente oder durch Beschreibung der Eigenschaften der Elemente. Wir stellen Ihnen diese beiden Möglichkeiten im Folgenden vor.

Explizite Angabe der Elemente

Bei der expliziten Angabe der Elemente einer Menge wird die Menge durch explizites Aufzählen der Elemente beschrieben. Ist M zum Beispiel die Menge, die die Zahlen 3, 7 und 1 enthält, so wird $M = \{1, 3, 7\}$ geschrieben. Durch explizite Angabe können auch unendliche Mengen beschrieben werden.

B**Beispiel 1.2: Menge der natürlichen Zahlen**

Die Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1.1)$$

heißt die Menge der *natürlichen Zahlen*. Es ist zu beachten, dass nach unserer (klassischen) Definition $0 \notin \mathbb{N}$ gilt. Die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null wird mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.

Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen ist zu beachten: Dadurch wird zum Ausdruck gebracht, dass eine Menge definiert wird.

Beschreibung der Eigenschaften der Elemente

Bei der Beschreibung einer Menge durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente. Dazu ist zunächst eine *Grundmenge* anzugeben, aus der die Elemente der Menge M stammen dürfen. Die Grundmenge bezeichnen wir mit G . Für jedes $x \in G$ sei weiterhin eine Eigenschaft $E(x)$ definiert. Dann wird eine neue Menge M durch $M := \{x \in G \mid E(x)\}$ beschrieben. Zu M gehören also alle Elemente aus G , die die besagte Eigenschaft besitzen.

Beispiel 1.3: Gerade natürliche Zahlen

Es bezeichne M die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}.$$

In diesem Fall ist also $\mathbb{N}$ die Grundmenge und die Eigenschaft $E(x)$ „gerade sein“. Offensichtlich hat jede natürliche Zahl genau eine der beiden Eigenschaften: Sie ist gerade, oder sie ist es nicht. Abgekürzt wird auch $M = 2\mathbb{N}$ geschrieben.

B

Zum Abschluss dieser Einführung geben wir in Definition 1.2 noch die leere Menge an.

Leere Menge

Definition 1.2: Leere Menge

Die *leere Menge* ist eine Menge, die kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

D

Die leere Menge mag auf den ersten Blick etwas sonderlich wirken, sie wird uns im Folgenden aber häufig begleiten. Im folgenden Abschnitt führen wir wichtige elementare Zahlenmengen wie ganze oder rationale Zahlen ein.

Wichtige Zahlenmengen

In der Mathematik wurden immer wieder neue Mengen definiert. Es werden nun die wichtigsten Mengen unseres Anschauungsraums kurz vorgestellt. Ausgangspunkt war die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Diese haben wir in Beispiel 1.2 eingeführt. Wir zeigen nun, wie wir ausgehend von $\mathbb{N}$ zu den weiteren elementaren Zahlenmengen kommen. Dazu seien a und b natürliche Zahlen, also $a, b \in \mathbb{N}$. Dann besitzt nicht jede Gleichung der Form $a + x = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{N}$. Sehen wir uns dazu Beispiel 1.4 an.

Beispiel 1.4: Nicht lösbare Gleichung in $\mathbb{N}$

Wird für die Gleichung $a + x = b$ etwa $a = 5$ und $b = 3$ gewählt, so ist die Gleichung nicht in $\mathbb{N}$ lösbar.

B

Um Gleichungen wie in Beispiel 1.4 lösen zu können, wurden die *ganzen Zahlen* eingeführt. Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. In aufzählender Schreibweise gilt

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.2)$$

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so kann jede Gleichung der Form $a + x = b$ mit $x \in \mathbb{Z}$ gelöst werden, denn es gilt $x = b - a$. Die Lösung x ist dann für gegebene $a, b \in \mathbb{Z}$ eindeutig.

Wird aber eine Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ betrachtet, so ist diese Gleichung im Allgemeinen nicht mit einer ganzen Zahl x lösbar. Sehen wir uns dazu Beispiel 1.5 an.

Unlösbare Gleichungen über $\mathbb{Z}$

B**Beispiel 1.5: Nicht lösbare Gleichung in $\mathbb{Z}$**

Die Gleichung $2 \cdot x = 1$ ist nicht mit einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Rationale Zahlen

Die Mathematiker erweiterten daher die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu einer neuen Menge, die mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet wird. $\mathbb{Q}$ heißt die Menge der *rationalen Zahlen*. Die rationalen Zahlen werden üblicherweise durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben. Es gilt

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.3)$$

Es ist zu beachten, dass die Division durch 0 nicht zulässig ist. Daher wäre eine Definition der Form $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ nicht zulässig. Des Weiteren ist zu beachten, dass in Gleichung (1.3) keine Grundmenge angegeben wurde, aus der $\frac{m}{n}$ stammt. Das ist laut obiger Beschreibung von Mengen mittels Eigenschaften ihrer Elemente nicht zulässig, aus didaktischen Gründen wird dies aber dennoch zugelassen (andernfalls müsste vorher eine andere Menge definiert worden sein, die erst weiter unten abgeleitet wird). Dies zeigt auf, wie kompliziert die formal korrekte Handhabung von Mengen ist.

Mehrdeutigkeit

In der Form von Gleichung (1.3) sind aber nicht alle Elemente der rationalen Zahlen unterschiedlich, denn es gilt $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$. Für jede rationale Zahl gibt es also unendlich viele Darstellungen. Dies führt zu der Frage, wie sich eine eindeutige Darstellung ergibt?

Die Antwort ist die, dass gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner solange gekürzt werden, bis keine gemeinsamen Teiler größer als 1 existieren. Der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner ist dann 1. Es wird dafür auch abgekürzt $\text{ggT}(m, n) = 1$ geschrieben, oder noch kürzer $(m, n) = 1$. Daher gilt

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \right\}. \quad (1.4)$$

In Gleichung (1.4) wird jede rationale Zahl eindeutig dargestellt.

In $\mathbb{Q}$ sind nun alle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ eindeutig lösbar. Es gilt $x = \frac{b}{a}$. Damit ist $\mathbb{Q}$ die kleinste unendliche Menge, in der wie gewohnt mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ gerechnet werden.

Unlösbare Gleichungen über $\mathbb{Q}$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist zwar eine wichtige, aber nicht die letzte Zahlenmenge unseres Anschauungsraums. Denn eine Gleichung der Form $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{N}$ ist im Allgemeinen nicht mit einer rationalen Zahl x lösbar. Betrachten wir dazu Beispiel 1.6.

B**Beispiel 1.6: Nicht lösbare Gleichung in $\mathbb{Q}$**

Die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$. Daher folgt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Das können wir an dieser Stelle noch nicht zeigen, Sie werden das aber später mittels eines Beweises durch Widerspruch beweisen. Weitere bekannte Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, sind die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e .

Reelle Zahlen

Die wichtige Menge, die alle rationalen Zahlen, alle Zahlen der Form $\sqrt{x}$ mit positivem $x \in \mathbb{Q}$ sowie Zahlen wie π und e enthält, ist die Menge der reellen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. An dieser Stelle kann aber weder durch explizite Angabe noch durch Beschreibung der Eigenschaften von reellen Zahlen die Menge $\mathbb{R}$ definiert werden. Auch dies ist ein Indiz, wie schwierig

die formale Mengenlehre ist. Und dennoch besitzt jeder eine konkrete Vorstellung davon, was eine reelle Zahl ist. Eine einfache Interpretation aller positiven reellen Zahlen sind Längen: Sind zwei verschiedene Punkte gegeben, so gibt es eine positive reelle Zahl, deren Wert gleich dem Abstand der beiden Punkte ist. Durch Hinzunahme der Null und der negativen reellen Zahlen ergibt sich so die Menge $\mathbb{R}$.

Zuletzt betrachten wir noch Gleichungen über $\mathbb{R}$, die aber nicht $\mathbb{R}$ lösbar sind. Beispiel 1.7 erläutert dies an Hand einer berühmten Gleichung.

Unlösbar Gleichungen
über $\mathbb{R}$

Beispiel 1.7: Nicht lösbar Gleichung in $\mathbb{R}$

Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

B

In der Mathematik wird eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ mit i bezeichnet. Sie heißt die *imaginäre Einheit*, da i nicht in unserem Anschauungsraum liegt. Die Menge

Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.5)$$

wird als die Menge der *komplexen Zahlen* bezeichnet. Eine wichtige Eigenschaft der komplexen Zahlen ist, dass jede Gleichung mit komplexen Koeffizienten in $\mathbb{C}$ lösbar ist. Später besprechen wir die reellen und komplexen Zahlen detaillierter, vorher sehen wir uns an, wie wir Mengen miteinander verknüpfen können.

1.4 Operationen auf Mengen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Operationen auf Mengen vorgestellt. Hierzu gehören die Bildung von Teilmengen, Vereinigungsmengen, Schnittmengen und Komplementen. Bevor diese Operationen erläutert werden, wird zuerst in Definition 1.3 den Begriff der *Ordnung* einer Menge eingeführt.

Ordnung einer Menge

Definition 1.3: Ordnung, Kardinalität

Es sei M eine Menge. Die Anzahl der Elemente von M heißt die *Ordnung* von M . Sie wird mit $|M|$ bezeichnet. *Kardinalität* ist eine synonyme Bezeichnung für Ordnung.

Die Menge heißt *endlich*, falls $|M|$ endlich ist, und *unendlich* andernfalls.

D

Beispiel 1.8: Ordnung einer Menge

Es seien die Mengen $M := \{3, 6, 1, -1\}$ sowie $T_1 := \{-1, 1\}$ gegeben. Dann gilt $|M| = 4$ und $|T_1| = 2$. Beide Mengen sind also endlich.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sowie $\mathbb{C}$ hingegen sind unendlich.

Zuletzt betrachten wir noch die Ordnung der leeren Menge: da diese kein Element enthält, gilt $|\emptyset| = 0$.

B

Auf Mengen können verschiedene Operationen durchgeführt werden. Zunächst wird der Begriff der Teilmenge eingeführt.

Teilmenge

D**Definition 1.4:** Teilmenge, Obermenge und Inklusion

Es sei M eine Menge. Eine Menge T heißt *Teilmenge* von M , falls für jedes $x \in T$ auch $x \in M$ gilt. Die Menge M heißt dann *Obermenge* von T . Ist T eine Teilmenge von M , so wird auch $T \subset M$ geschrieben. Die Beziehung $\subset$ heißt *Inklusion*.

Zur Notation Gilt $T \subset M$, so wird auch gesagt *T ist in M enthalten* oder *M enthält T* . Andernfalls wird $T \not\subset M$ geschrieben. Oft findet sich auch die Schreibweise $T \subseteq M$ zur Angabe, dass T eine Teilmenge von M ist.

B**Beispiel 1.9:** Teilmengen

Wir betrachten zunächst die Mengen $M := \{3, 6, 1, -1\}$, $T_1 := \{-1, 1\}$ und $T_2 := \{6, 5\}$.

- Es gilt $T_1 \subset M$, d.h. T_1 ist eine Teilmenge von M , weil beide Elemente von T_1 auch in M liegen. Weiterhin ist M Obermenge von T_1 .
- Es gilt $T_2 \not\subset M$, d.h. T_2 ist keine Teilmenge von M , weil die Zahl 5 zwar Element von T_2 , nicht aber von M ist.

Für die in Abschnitt 1.3 betrachteten elementaren Zahlenmengen gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Gleichheit von Mengen, echte Teilmenge

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *gleich*, falls sowohl M_1 eine Teilmenge von M_2 ist als auch M_2 eine Teilmenge von M_1 ist – es gilt also $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$. Es wird dann $M_1 = M_2$ geschrieben. Gilt $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \not\subset M_1$, dann heißt M_1 eine *echte Teilmenge* von M_2 .

B**Beispiel 1.10:** Gleichheit von Mengen, echte Teilmenge

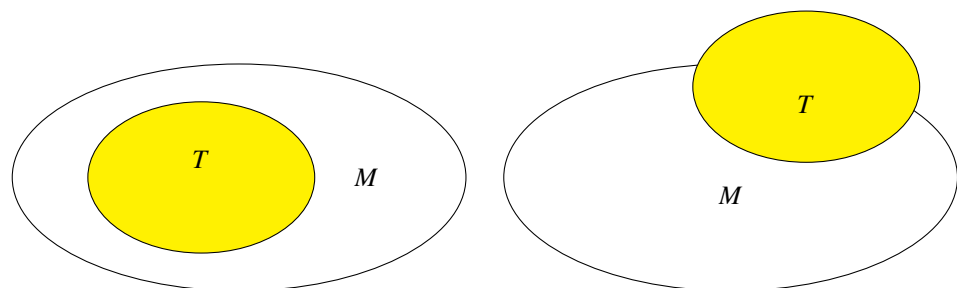
Wir betrachten die Mengen $M := \{3, 6, 1, -1\}$, $T_1 := \{-1, 1\}$ sowie $N = \{-1, 1, 3, 6\}$.

- T_1 ist eine echte Teilmenge von M , weil beide Elemente von T_1 auch in M liegen, es aber auch weitere Elemente in M gibt, die nicht in T_1 liegen (nämlich die Zahlen 3 und 6).
- Es gilt $M = N$, weil beide Mengen jeweils Teilmenge der anderen Menge sind. Sie haben also die gleichen Elemente.

Euler-Venn-Diagramme

Die Inklusion wird gerne durch *Euler-Venn-Diagramme* visualisiert. Beispiele für solche Diagramme sind in Abbildung 1.2 dargestellt.

Abb. 1.2: Euler-Venn-Diagramme



Auf der linken Seite in Abbildung 1.2 gilt $T \subset M$, weil jedes Element von T offensichtlich auch in M liegt. Auf der rechten Seite in Abbildung 1.2 gilt $T \not\subset M$, weil es Elemente von T gibt, die offensichtlich nicht in M liegen. Also ist T in diesem Fall keine Teilmenge von M .

Aus gegebenen Mengen ergeben sich durch unterschiedliche Mengenoperationen neue Mengen. Die wichtigsten Mengenoperationen werden in Definition 1.5 eingeführt.

Mengenoperationen

Definition 1.5: Vereinigung, Durchschnitt, Komplement von Mengen

Es seien M und N zwei Mengen.

1. Die *Vereinigung* der Mengen M und N besteht aus allen Elementen, die in mindestens einer der Mengen M oder N liegen. Formal wird $M \cup N$ geschrieben. Es gilt $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$.
2. Der *Durchschnitt* der Mengen M und N besteht aus allen Elementen, die sowohl in M als auch in N liegen. Formal wird $M \cap N$ geschrieben. Es gilt also $M \cap N := \{x \mid x \in M, x \in N\}$.
3. Die *Differenz* der Mengen M und N besteht aus allen Elementen, die zwar in M , nicht aber in N liegen. Formal wird $M \setminus N$ geschrieben. Es gilt also $M \setminus N := \{x \mid x \in M, x \notin N\}$. Die Menge $M \setminus N$ heißt auch das *Komplement* von N in M . Die Menge $M \setminus N$ wird auch als *M ohne N* bezeichnet.

D

Wir weisen darauf hin, dass bei der Definition der Vereinigung von Mengen das Wort „oder“ ein *inklusive* Oder ist: Die Aussage ist gültig, falls x in der Menge M , in der Menge N oder in beiden liegt. In der Mathematik wird meist das inklusive Oder verwendet.

Inklusives Oder

Beispiel 1.11: Vereinigung, Schnittmenge, Komplement von Mengen

Betrachten wir zunächst $M := \{a, h, k\}$ und $N := \{b, k, r\}$. Dann gilt

$$M \cup N = \{a, b, h, k, r\}$$

$$M \cap N = \{k\}$$

$$M \setminus N = \{a, h\}$$

Weitere Mengenoperationen auf den elementaren Zahlenmengen der ganzen bzw. natürlichen Zahlen ergeben:

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z}_0^-$$

Im letzten Beispiel haben wir dabei von der Notation $\mathbb{Z}_0^-$ Gebrauch gemacht. Das hochgestellte Minuszeichen bedeutet, dass wir alle negativen Elemente der Grundmenge $\mathbb{Z}$ berücksichtigen, der Index Null fügt schließlich noch die Zahl 0 hinzu.

B

Bei der Bildung des Durchschnitts zweier Mengen kann es vorkommen, dass es keine Elemente gibt, die in beiden Mengen liegen. Solche Mengen heißen *disjunkt*. Der Durchschnitt disjunkter Mengen ist die *leere Menge*.

Disjunkte Mengen

B**Beispiel 1.12: Disjunkte Mengen**

Als Beispiel für disjunkte Mengen betrachten wir $M := \{a, h, k\}$ und $N := \{b, r\}$. Dann gilt

$$M \cap N = \{a, h, k\} \cap \{b, r\} = \emptyset.$$

Ordnung der Vereinigungsmenge

Aus Definition 1.3 kennen Sie den Begriff der Ordnung einer Menge. Sind zwei Mengen M und N gegeben, so stellt sich die Frage, wie $|M \cup N|$ von den jeweiligen Ordnungen von M und N abhängt. Die Antwort finden Sie in Formel (1.6). Es gilt

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|. \quad (1.6)$$

Zur Motivation von Formel (1.6) sei gesagt, dass wir die Anzahl der Elemente der Vereinigungsmenge erhalten, indem wir die Ordnungen der beiden Mengen M und N addieren und davon die Anzahl der Elemente in der Schnittmenge abziehen – denn die Elemente der Schnittmenge haben wir vorab doppelt gezählt, nämlich einmal in $|M|$ und einmal in $|N|$.

B**Beispiel 1.13: Ordnung der Vereinigungsmenge**

Wir betrachten $M := \{a, h, k\}$ und $N := \{b, k, r\}$. Dann wissen wir bereits

$$M \cup N = \{a, b, h, k, r\} \Rightarrow |M \cup N| = 5$$

$$M \cap N = \{k\} \Rightarrow |M \cap N| = 1$$

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 3 + 3 - 1 = 5$$

Kartesisches Produkt

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch das kartesische Produkt von Mengen eingeführt. Dieses hat zum Ziel, geordnete Tupel zu nutzen. In der Informatik finden Sie dieses Konzept z.B. beim verbreiteten Datentyp Array.

D**Definition 1.6: Kartesisches Produkt**

Es seien $M_1, \dots, M_n$ nichtleere Mengen. Das kartesische Produkt der Mengen $M_1, \dots, M_n$ wird mit $M_1 \times \dots \times M_n$ bezeichnet. Es besteht aus allen n -Tupeln $(m_1, \dots, m_n)$ mit $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$:

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n\}. \quad (1.7)$$

Gilt $M_1 = \dots = M_n = M$, so wird auch kurz M^n für das kartesische Produkt geschrieben.

Reelle Ebene

Das kartesische Produkt ist benannt nach René Descartes (1596-1650). Er erkannte, dass die Punkte der reellen Ebene durch Zahlenpaare dargestellt werden können. Setzen wir in Definition 1.6 $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene. Es sei $P \in \mathbb{R}^2$. P wird also durch (m_1, m_2) mit reellen Zahlen m_1, m_2 dargestellt. Typischerweise wird m_1 als x -Koordinate und m_2 als y -Koordinate von P bezeichnet. In der Informatik würden Sie einen Array der Länge zwei über dem Datentyp float zur Darstellung von Punkten der reellen Ebene verwenden.

Beispiel 1.14: Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$

Unser Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ist das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jeder Punkt im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch ein 3-Tupel (m_1, m_2, m_3) , die als x -, y - und z -Koordinate bezeichnet werden.

In der Informatik können Sie einen Array des Datentyps `float` der Länge 3 verwenden, um die Punkte im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ darzustellen. Ist a eine Instanz eines solchen Arrays, dann gilt folgender Zusammenhang: $a[0]$ ist die x -Koordinate, $a[1]$ ist die y -Koordinate und $a[2]$ ist die z -Koordinate.

B

Es ist zu beachten, dass Tupel im Gegensatz zu Mengen geordnet sind. Die Punkte $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ und $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ beschreiben also unterschiedliche Punkte. Allgemein gilt, dass zwei n -Tupel $(m_1, \dots, m_n)$ und $(m'_1, \dots, m'_n)$ gleich sind genau dann, wenn $m_1 = m'_1, \dots, m_n = m'_n$ gilt.

Tupel sind geordnet

Kontrollaufgabe 1.1: Elemente von Zahlenmengen

Geben Sie jeweils eine Zahl x an, die jeweils die genannte Bedingung erfüllt:

a) $x \notin \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$

c) $x \notin \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$

b) $x \notin \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Q}$

d) $x \notin \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}, x \neq i$

K**1.5 Die reellen Zahlen**

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Eigenschaften der reellen Zahlen. An dieser Stelle können sie zwar nicht formal eingeführt werden, doch können Sie sich die reellen Zahlen zum Beispiel als alle möglichen Streckenlängen oder Massen vorstellen, die in der Natur auftreten. Das sind zunächst nur die positiven reellen Zahlen, wobei natürlich auch die zugehörigen negativen Zahlen sowie die Null hinzugenommen werden müssen. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

Veranschaulichung

Oft und gerne werden die reellen Zahlen anhand der *Zahlengerade* veranschaulicht. Dabei zeichnen Sie einen horizontalen Pfeil, schreiben rechts die Mengenbezeichnung $\mathbb{R}$ an den Pfeil und definieren die Lage der Zahl 0 und der Zahl 1, d.h. Sie legen die Einheitsstrecke fest. Dann können Sie noch weitere reelle Zahlen einzeichnen, wie Sie das zum Beispiel in Abbildung 1.3 sehen.

Zahlengerade

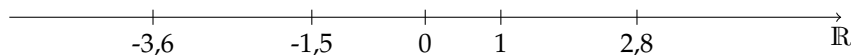


Abb. 1.3: Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade.

Arithmetik in $\mathbb{R}$

Im Folgenden werden nun die grundlegenden Eigenschaften der Arithmetik mit reellen Zahlen vorgestellt, also wie man mit reellen Zahlen rechnet. Dabei kennen Sie sicher schon die beiden unterschiedlichen Rechenoperationen Addition sowie Multiplikation. Für die Menge der reellen Zahlen ohne die Null wird auch $\mathbb{R}^\times$ geschrieben; es gilt also $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Menge $\mathbb{R}^\times$

Bevor wir uns die Eigenschaften der beiden Rechenoperationen reeller Zahlen

Schreibweise

ansehen, möchten wir kurz eine wichtige mathematische Schreibweise an Hand der Addition erläutern:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Das bedeutet folgendes: das Pluszeichen vor dem Doppelpunkt gibt das Symbol der Rechenoperation an. Damit ist klar, dass die Funktion 'Addition' verwendet wird. Die Schreibweise $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besagt, dass die Addition zwei Eingaben benötigt (nämlich die beiden Summanden). Schließlich bedeutet das Symbol $\rightarrow \mathbb{R}$, dass das Ergebnis der Addition wieder eine reelle Zahl ist. Damit sind gültige Eingaben sowie die Menge, aus der das Additionsergebnis stammt, festgelegt.

Eigenschaften der Addition reeller Zahlen

Die Addition in $\mathbb{R}$ ist eine Verknüpfung $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (d. h. zwei reelle Zahlen werden addiert und auf eine weitere reelle Zahl abgebildet, nämlich auf deren Summe). Die Verknüpfung heißt *Addition*. Die Addition hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) Assoziativität: Es gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (b) Neutrales Element: Es gibt eine reelle Zahl 0 mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Zahl 0 heißt das *neutrale Element der Addition*.
- (c) Additiv Inverses: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $x + x' = 0$. Die Zahl x' heißt das *additiv Inverse* zu x . Meist schreibt man $-x$ für das additiv Inverse.
- (d) Kommutativität: Es gilt $x + y = y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

K

Kontrollaufgabe 1.2: Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{R}$

Geben Sie analog zur Addition die Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{R}$ an.

Distributivgesetze

Nachdem wir nun mit der Addition und Multiplikation reeller Zahlen zwei arithmetische Operationen kennen, erläutern wir, wie diese beiden Operationen in gemischten Ausdrücken verwendbar sind. Es gelten die folgenden *Distributivgesetze* für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- (a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- (b) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Vielleicht erinnern Sie sich noch an die Regel 'Punktrechnung vor Strichrechnung' aus der Schule. Gerechtfertigt wird diese Priorisierung der Multiplikation durch die Distributivgesetze.

Ungleichungen

Anordnung von $\mathbb{R}$

Bei der Beschreibung der Zahlengerade wurde ausgehend von einer Zahl 0 definiert, wo positive bzw. negative reelle Zahlen bezüglich der 0 liegen. Intuitiv ist bekannt, dass positive Zahlen größer sind als die 0 und dass negative Zahlen kleiner sind als die 0. Positive Zahlen liegen rechts von der 0, negative links von ihr. Allgemein ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ größer als eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, wenn sie *rechts* von y auf der Zahlengerade liegt. Es wird dann $x > y$ geschrieben. Analog ist $x \in \mathbb{R}$ kleiner als $y \in \mathbb{R}$, wenn sie *links* von y auf der Zahlengerade liegt. Ebenso ist intuitiv bekannt, dass zwei reelle Zahlen stets vergleichbar sind, d.h. es gilt entweder $x < y$, $x > y$ oder $x = y$. Es wird dafür auch gesagt, $\mathbb{R}$ sei *angeordnet*.

Anordnungsoperator $\leq$

Es ist üblich, die Möglichkeiten $x < y$ und $x = y$ zusammenzufassen und dafür $x \leq y$ zu schreiben. Wir nennen $\leq$ den *Anordnungsoperator*. Wir fassen die Eigenschaften der Anordnung reeller Zahlen zusammen. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$: Zwei reelle Zahlen sind also stets miteinander vergleichbar.
2. Es gilt $x \leq x$: Jede reelle Zahl ist mit sich selber vergleichbar.
3. Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$: Es gibt keine echte Schleifen in $\mathbb{R}$.
4. Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$: Die Anordnung $\leq$ ist auf $\mathbb{R}$ *transitiv*.
5. Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$: Die Anordnung $\leq$ ist invariant unter der Addition, d.h. Addition einer reellen Zahl z ändert also nichts an der Relation $\leq$.
6. Aus $x \leq y$ und $0 \leq z$ folgt $x \cdot z \leq y \cdot z$: Die Anordnung $\leq$ ist invariant unter der Multiplikation mit einer **nicht-negativen** reellen Zahl.

Gilt $x \leq y$, so kann auch $y \geq x$ geschrieben werden. In der ersten Schreibweise wird „ x ist kleiner (oder) gleich y “, in der zweiten Schreibweise wird „ y ist größer (oder) gleich x “ gesagt. Gilt sogar $x < y$ (also $x \leq y$ und $x \neq y$), so wird „ x ist kleiner als y “ gesagt.

Größeroperator

Intervalle

Intervalle sind bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zum Beispiel ist die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$ ein Intervall. Zu diesem Intervall gehören alle reellen Zahlen, die größer gleich 3 und kleiner gleich 4 sind. Definition 1.7 gibt vier verschiedene Möglichkeiten für solche beschränkte Intervalle an.

Intervalle

Definition 1.7: Beschränkte Intervalle

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1. Die Menge $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ heißt das *abgeschlossene Intervall* zu den Intervallgrenzen a und b .
2. Die Menge $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ heißt das (*rechts*) *halboffene Intervall* zu den Intervallgrenzen a und b . Manchmal wird dies auch geschrieben als $[a, b)$.
3. Die Menge $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ heißt das (*links*) *halboffene Intervall* zu den Intervallgrenzen a und b . Manchmal wird dies auch geschrieben als $(a, b]$.
4. Die Menge $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ heißt das *offene Intervall* zu den Intervallgrenzen a und b . Manchmal wird dies auch geschrieben als (a, b) .

D

Ist das Intervall beschränkt, so heißt die positive Zahl $b - a$ die *Intervalllänge*. Es ist zu beachten, dass Intervalle Mengen sind, auch wenn ihre Darstellung nicht die geschweiften Klammern verwendet. Nach Definition 1.7 ist dies aber zulässig, da Intervalle eben durch solche Mengen definiert werden. Meist wird für die Bezeichnung von Intervallen einer der Buchstaben I oder J verwendet. Intervalle können am Zahlenstrahl verdeutlicht werden, wie Sie Beispiel 1.15 entnehmen können.

Intervalllänge

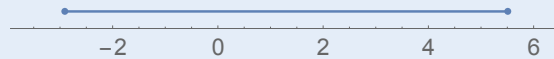
B**Beispiel 1.15: Intervalle am Zahlenstrahl**

Wir stellen die folgenden vier beschränkten Intervalle am Zahlenstrahl dar:

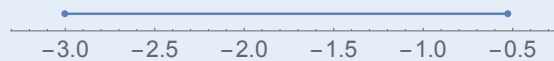
1. Intervall $I_1 := [\pi, 4]$:



2. Intervall $I_2 := [-3; 5, 5]$:



3. $I_3 := [-3; -0, 5]$:



4. $I_4 := [e, \pi]$:



Mengenoperationen auf Intervallen

Da Intervalle Mengen sind, können auf ihnen verschiedene Operationen durchgeführt werden. Betrachten wir die Intervalle aus Beispiel 1.15. Es ist $I_1 := [\pi, 4]$ eine Teilmenge von $I_2 := [-3; 5, 5]$, es gilt also $I_1 \subset I_2$. Weiterhin kann die Vereinigungsmenge, Schnittmenge und die Komplementmenge von zwei Intervallen gebildet werden. So ist zu erkennen, dass $I_1 \cap I_2 = [\pi, 4] = I_1$, $I_1 \cap I_3 = \emptyset$ sowie $I_1 \cap I_4 = \emptyset$ ist. Laut der Definition 1.7 ist daher die Schnittmenge zweier Intervalle im Allgemeinen kein Intervall. Gleiches gilt für die Vereinigung und die Komplementmenge von zwei Intervallen. Beispielsweise ist die Menge $I_1 \cup I_3 = [-3; -0.5] \cup [\pi, 4]$ offensichtlich kein Intervall.

Unendlich ∞

In Kontrollaufgabe 1.3 sollen Sie unbeschränkte Intervalle betrachten. Dazu benötigen Sie das Symbol ∞ , mit dem üblicherweise Unendlich dargestellt wird.

K**Kontrollaufgabe 1.3: Unbeschränkte Intervalle**

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie analog zu den beschränkten Intervallen jeweils vier Möglichkeiten für unbeschränkte Intervalle an (im Hinblick auf die Eigenschaft offen / abgeschlossen). Dabei ist eine Intervallgrenze $-\infty$ oder ∞ (Achtung: Inklusives Oder).

Betrag

Abstand

Den Begriff *Abstand* kennen wir aus unserem alltäglichen Leben. Es ist intuitiv klar, was mit dem Abstand zweier reeller Zahlen gemeint ist, wenn sie auf der Zahlengerade betrachtet werden. Es ist auch klar, dass dieser Abstand nie negativ ist. Der *Betrag* einer reellen Zahl in Definition 1.8 formalisiert diesen intuitiven Begriff Abstand.

D**Definition 1.8: Betrag**

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Für $x \geq 0$ wird $|x| := x$ gesetzt, für $x < 0$ wird $|x| := -x$ gesetzt. Die Zahl $|x|$ heißt der *Betrag* von x .

Beispiel 1.16: Betrag

Für den Betrag der folgenden reellen Zahlen gilt:

- $|6,43| = 6,43$
- $|0| = 0$
- $|\pi| = \pi$

B

Der Betrag einer reellen Zahl ist nicht negativ. Sind x_0 und ε reelle Zahlen, $\varepsilon > 0$, so ist zu erkennen (z. B. auf der Zahlengerade), dass alle Zahlen x , die die Ungleichung $|x - x_0| \leq \varepsilon$ erfüllen, im abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ liegen. Dieses Intervall hat die Länge 2ε . Es heißt die ε -Umgebung der Zahl x_0 .

ε -Umgebung einer reellen Zahl

Die Betragsfunktion hat eine Reihe von Eigenschaften. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

Eigenschaften des Betrags

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Kontrollaufgabe 1.4: Dreiecksungleichung

Geben Sie für die Dreiecksungleichung reelle Zahlen x und y mit der Eigenschaft $|x + y| < |x| + |y|$ an.

K**1.6 Komplexe Zahlen**

In diesem Abschnitt wird die Menge der komplexen Zahlen behandelt. Sie ist definiert als die Menge $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Dabei ist i eine Lösung der Gleichung $X^2 + 1 = 0$. Es gilt also $i^2 = -1$. Die Zahl i heißt die *imaginäre Einheit*. Sie wurde von L. Euler im Jahr 1777 eingeführt. Komplexe Zahlen sind in vielen technischen Disziplinen wichtig, insbesondere der Informatik. Mit den komplexen Zahlen lassen sich periodische Vorgänge der Natur besonders einfach beschreiben.¹ Weiterhin sind sie auch bei der Bildverarbeitung (z. B. JPEG) wichtig.²

Komplexe Zahlen

Typischerweise wird eine komplexe Zahl mit dem Buchstaben z bezeichnet. Es sei also $z \in \mathbb{C}$. Aus der Definition der komplexen Zahlen wird abgeleitet, dass es reelle Zahlen x und y gibt mit $z = x + iy$, deren Bezeichnung wir in Definition 1.9 angeben.

Real-/Imaginärteil

Definition 1.9: Realteil und Imaginärteil von komplexen Zahlen

Für eine komplexe Zahl $z = x + yi$ heißt x der *Realteil* von z , y heißt der *Imaginärteil* von z . Man schreibt $\operatorname{Re}(z) = x$ für den Realteil von z und $\operatorname{Im}(z) = y$ für den Imaginärteil von z .

Komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re}(z) = 0$ heißen (*rein*) *imaginär*. Rein imaginäre komplexe Zahlen sind also von der Form $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$.

D

Es ist zu beachten, dass Real- und Imaginärteil reelle Zahlen sind. Insbesondere gilt $\operatorname{Im}(z) \neq yi$. Die Angabe yi als Imaginärteil der komplexen Zahl $x + yi$ ist ein sehr

Real- und Imaginärteil sind reell

¹ Fourierreihen und Fourierintegrale

² Die diskrete Fouriertransformation ist grundlegend für die Bildverarbeitung.

verbreiteter Fehler. Eine komplexe Zahl z , deren Imaginärteil gleich 0 ist, kann auch als reelle Zahl interpretiert werden. So ergeben sich alle reellen Zahlen. Ist $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so ist $z := x + 0i$ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Re}(z) = x$ und $\operatorname{Im}(z) = 0$. Es gilt also $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Es folgt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ebenso gilt, dass die Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen mit Imaginärteil 0 jeweils wieder eine komplexe Zahl mit Imaginärteil 0 ergibt.

B**Beispiel 1.17: Real- und Imaginärteil**

Für $z = 3 + 4i$ gilt $\operatorname{Re}(z) = 3$ und $\operatorname{Im}(z) = 4$.

Die komplexe Zahl $w = -2i$ ist rein imaginär, es gilt $\operatorname{Re}(w) = 0$ und $\operatorname{Im}(w) = -2$.

Gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen werden typischerweise in der *Gaußschen Zahlenebene* veranschaulicht. Die Gaußsche Zahlenebene stellt eine komplexe Zahl in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dar. Die Gaußsche Zahlenebene ergibt sich aus der bekannten zweidimensionalen reellen Zahlenebene (x - y -Ebene), indem auf der x -Achse der Realteil von z und auf der y -Achse der Imaginärteil von z abgetragen wird. Die Zahl $x + yi$ entspricht also dem Punkt (x, y) und umgekehrt. Wir werden im Folgenden die Gaußsche Zahlenebene nutzen.

K**Kontrollaufgabe 1.5: Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen**

Geben Sie für die folgenden komplexen Zahlen jeweils den Real- und den Imaginärteil an:

a) $z = 2 - 5i$

d) $z = i$

b) $z = \sqrt{5}i$

e) $z = 0$

c) $z = -\frac{1}{6}$

K**Kontrollaufgabe 1.6: Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen**

Geben Sie die komplexen Zahlen an, welche den folgenden Real- und Imaginärteil besitzt:

a) $\operatorname{Re}(z) = -4, \operatorname{Im}(z) = 7$

c) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{4}, \operatorname{Im}(z) = 0$

b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im}(z) = 1$

d) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 7$

1.6.1 Addition/Subtraktion komplexer Zahlen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.

Addition komplexer Zahlen

Addition komplexer Zahlen

Die Addition von zwei komplexen Zahlen ist ähnlich der bereits bekannten reellen Addition. Sind $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$ komplexe Zahlen, so setzt man

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Komplexe Zahlen werden also addiert, indem die jeweiligen Real- und Imaginärteile addiert werden.

B**Beispiel 1.18: Addition komplexer Zahlen**

Gegeben sind $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = -2 + i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4 - 2) + (2 + 1)i \\ &= 2 + 3i. \end{aligned}$$

Die Veranschaulichung der Addition in der Gaußschen Zahlenebene ist in Abbildung 1.4 dargestellt.

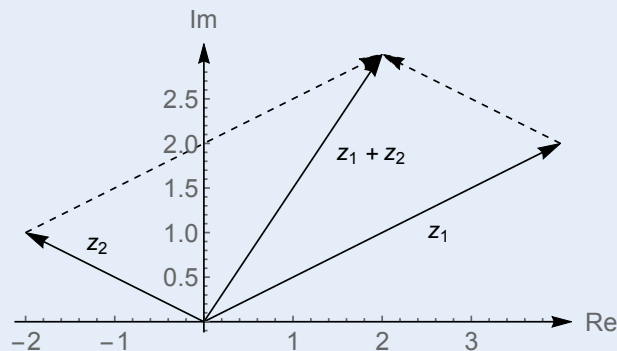


Abb. 1.4: Addition der komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = -2 + i$.

Eine komplexe Zahl z ist auch als Pfeil vom Nullpunkt zu dem entsprechenden Punkt (x, y) in der Gaußschen Zahlenebene vorstellbar. Dieser Pfeil wird als *Zeiger* zur komplexen Zahl z bezeichnet. Die Addition der komplexen Zahlen entspricht der gewohnten Addition der Zeiger: Die Zahlen z_1 und z_2 werden addiert, indem der zu z_2 gehörende Zeiger entlang des zu z_1 gehörenden Zeigers parallel verschoben wird. Der zu $z_1 + z_2$ gehörende Zeiger ist dann der Pfeil vom Nullpunkt zu der Spitze des parallel verschobenen Zeigers zu z_2 (siehe Abbildung 1.4).

Veranschaulichung:
Zeiger

Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen haben im Hinblick auf die Addition komplexer Zahlen folgende Eigenschaft: Es gilt $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ und $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$. Denn nach Definition des Realteils und Definition der Addition berechnen wir $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) = x_1 + x_2 = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$. Gleiches gilt für die Imaginärteile.

Kontrollaufgabe 1.7: Addition komplexer Zahlen

Berechnen Sie die komplexe Zahl $z = z_1 + z_2$ für $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 1 - 2i$.

K**Subtraktion komplexer Zahlen**

Für die Erklärung der Subtraktion komplexer Zahlen gilt: Sind $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ komplexe Zahlen, so wird

Subtraktion komplexer
Zahlen

$$z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

gesetzt. Komplexe Zahlen werden also subtrahiert, indem die Real- und Imaginärteile jeweils subtrahiert werden.

B**Beispiel 1.19: Subtraktion komplexer Zahlen**

Gegeben ist $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = -2 + i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (4 - (-2)) + (2 - 1)i \\ &= 6 + i. \end{aligned}$$

Die Darstellung der Subtraktion dieser komplexen Zahlen mit Hilfe ihrer Zeiger findet sich in Abbildung 1.5. Es ist zu beachten, dass nun der Zeiger zu $-z_2$ an die Spitze des Zeigers zu z_1 gesetzt wird, um den Zeiger zu $z_1 - z_2$ zu erhalten.

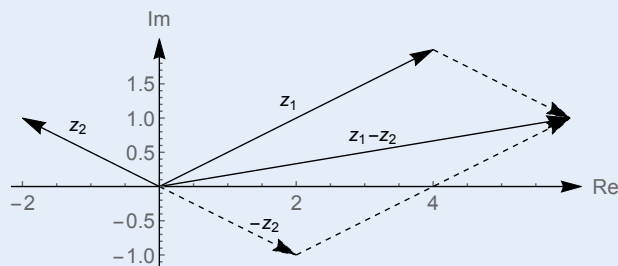


Abb. 1.5: Subtraktion der komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = -2 + i$.

K**Kontrollaufgabe 1.8: Subtraktion komplexer Zahlen**

Berechnen Sie die komplexe Zahl $z = z_1 - z_2$ für $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 1 - 2i$.

1.6.2 Potenzen der imaginären Einheit

Potenzen der imaginären Einheit

Als Nächstes werden die Potenzen i^k der imaginären Einheit i für $k \in \mathbb{N}_0$ betrachtet. Es gilt:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

Das Ergebnis einer Potenz mit $k > 4$ kann mithilfe einer Division mit Rest ermittelt werden. Hierzu wird durch die Division durch 4 mit Rest eine natürliche Zahl q und eine nicht-negative ganze Zahl r mit $0 \leq r \leq 3$ gefunden, die die Gleichung $k = 4q + r$ erfüllen. Es folgt $i^k = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = i^r$, da $i^{4q} = 1$ gilt. Weiterhin folgt $i^k = 1$ für $r = 0$, $i^k = i$ für $r = 1$, $i^k = -1$ für $r = 2$ sowie $i^k = -i$ für $r = 3$.

Beispiel 1.20: Potenzen komplexer Zahlen

Wir berechnen die komplexe Zahl $z = i^{19}$.

$$\begin{aligned} i^{19} &= i^{4 \cdot 4 + 3} \\ &= (i^4)^4 \cdot i^3 \\ &= 1^4 \cdot i^2 \cdot i \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot i \\ &= -i. \end{aligned}$$

Alternativ folgt das Ergebnis aus obiger Überlegung mit $r = 3$ für die Division von 19 durch 4 mit Rest.

B**Kontrollaufgabe 1.9: Potenzen komplexer Zahlen**

Berechnen Sie die komplexe Zahl $z = i^{53}$.

K**Kontrollaufgabe 1.10: Komplexe Zahlen**

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (geben Sie insbesondere Real- und Imaginärteil des Ergebnisses an) *ohne* Zuhilfenahme des Rechners.

a) $z_1 = \frac{1}{i}$

b) $z_2 (5i)^7$

K**1.6.3 Multiplikation komplexer Zahlen**

Zur Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 werden zunächst im Produkt $z_1 \cdot z_2$ die Koeffizienten der Potenzen von $i^0 = 1$, $i^1 = i$ sowie i^2 gesammelt und anschließend die Gleichung $i^2 = -1$ ausgenutzt. Es gilt also

Multiplikation komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i + (y_1 \cdot y_2) \cdot i^2 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i. \end{aligned} \quad (1.8)$$

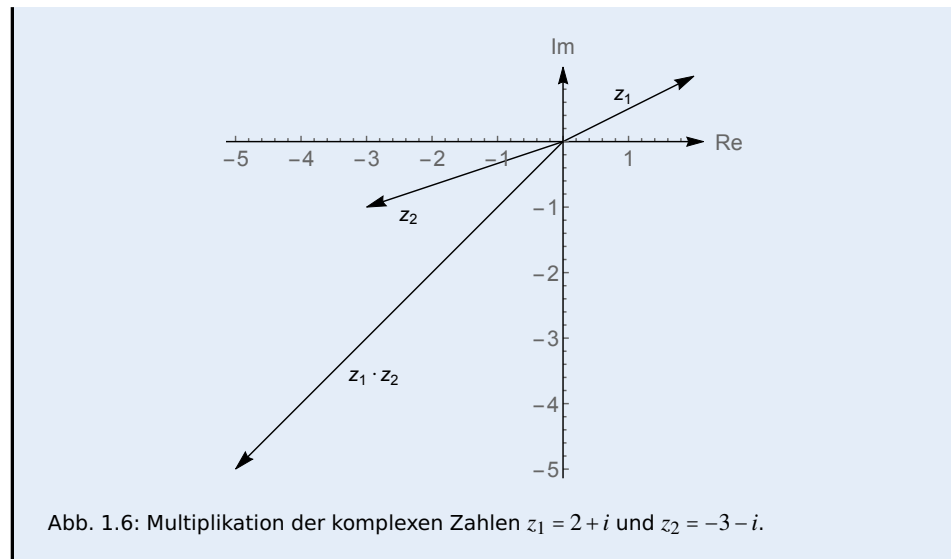
Beispiel 1.21: Multiplikation komplexer Zahlen

Für die Multiplikation wird $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = -3 - i$ betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + i) \cdot (-3 - i) \\ &= -3 \cdot 2 + (-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2) \cdot i + (-1) \cdot 1 \cdot i^2 \\ &= (-3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) + (-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2) \cdot i \\ &= -5 - 5 \cdot i. \end{aligned}$$

Die Multiplikation dieser Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ist in Abbildung 1.6 dargestellt.

B



K

Kontrollaufgabe 1.11: Multiplikation komplexer Zahlen

Berechnen Sie die komplexe Zahl $z = z_1 \cdot z_2$ für $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 4 - 5i$.

1.6.4 Betrag komplexer Zahlen

Als Nächstes wird der *Betrag* einer komplexen Zahl eingeführt.

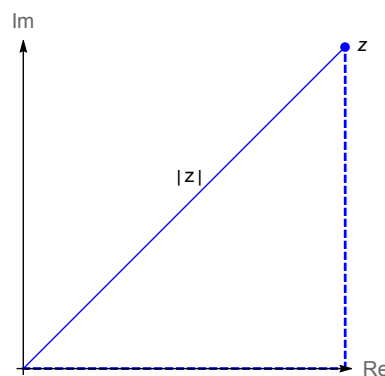
D

Definition 1.10: Betrag von komplexen Zahlen

Ist $z = x + yi \in \mathbb{C}$, so ist der *Betrag* von z der Abstand des Punktes (x, y) in der Gaußschen Zahlenebene vom Nullpunkt (also von der komplexen Zahl 0). Es wird $|z|$ für den Betrag von z geschrieben.

Die geometrische Interpretation des Betrages einer komplexen Zahl z ist in Abbildung 1.7 dargestellt.

Abb. 1.7: Betrag einer komplexen Zahl



Elementar geometrisch ist zu erkennen, dass der in Definition 1.10 angegebene Abstand für $z = x + yi$ gleich $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Es gilt also $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Denn der Nullpunkt $(0, 0)$, der Punkt (x, y) und der Punkt $(x, 0)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kantenlängen $|x|$ (Strecke $\overline{(0,0)(x,0)}$), $|y|$ (Strecke $\overline{(x,0)(x,y)}$) und $\sqrt{x^2 + y^2}$.

(Strecke $\overline{(0,0),(x,y)}$), sofern $z \neq 0$ gilt. Das ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. $|z|$ ist also eine reelle Zahl, und es gilt $|z| \geq 0$.

Beispiel 1.22: Betrag einer komplexen Zahl

Wir visualisieren zunächst den Betrag der komplexen Zahlen $z_1 = -3 - i$ und $z_2 = 2 + i$ in der Gaußschen Zahlenebene und berechnen den Abstand zum Ursprung mithilfe des Satzes des Pythagoras.

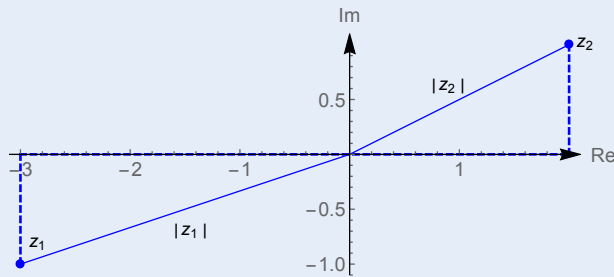


Abb. 1.8: Multiplikation der komplexen $z_1 = -3 - i$ und $z_2 = 2 + i$.

Es gilt $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ sowie $|z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

B

Die Betragsfunktion hat auf $\mathbb{C}$ analoge Eigenschaften wie die Betragsfunktion reeller Zahlen. Sind $w, z \in \mathbb{C}$, dann gilt:

Eigenschaften der Betragsfunktion

1. $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$.
2. Dreiecksungleichung: $|w + z| \leq |w| + |z|$.
3. $|w - z| \geq |w| - |z|$.

Kontrollaufgabe 1.12: Betrag komplexer Zahlen

Berechnen Sie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z = -2 + 0i$

c) $z = 4i$

b) $z = 3 + 4i$

K

1.6.5 Konjugiert komplexe Zahlen

In diesem Abschnitt betrachten wir konjugiert komplexe Zahlen.

konjugiert komplexe Zahl

Definition 1.11: Konjugiert komplexe Zahl

Für eine komplexe Zahl $z = x + yi$ heißt $\bar{z} := x - yi$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Es wird auch z^* für die zu z konjugiert komplexe Zahl geschrieben.

D

Es ergibt sich aus z die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$, indem der Realteil konstant gehalten wird und der Imaginärteil mit -1 multipliziert wird. Geometrisch ergibt sich der Punkt zu $\bar{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene, indem der Punkt zu z an der horizontalen Achse (der 'x-Achse' bzw. Realteilachse) gespiegelt wird.

B**Beispiel 1.23: Konjugiert komplexe Zahlen**

Für die Zahlen $z_1 = -3 - i$ und $z_2 = 2 + i$ gilt $\bar{z}_1 = -3 + i$ und $\bar{z}_2 = 2 - i$. Die geometrische Interpretation ist in Abbildung 1.9 dargestellt.

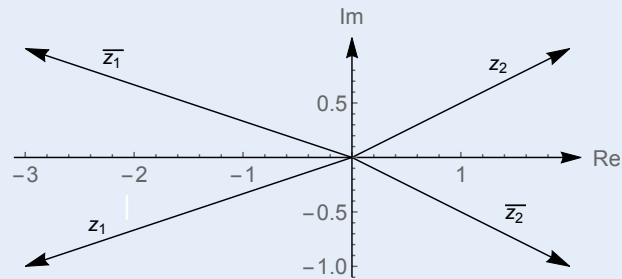


Abb. 1.9: Konjugiert komplexe Zahlen zu $z_1 = -3 - i$ und $z_2 = 2 + i$.

Das Produkt $z \cdot \bar{z}$

Eine Rechnung zeigt, dass $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$ ist. Das entspricht aber genau dem Quadrat von $|z|$. Insbesondere ist $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$, hat also den Imaginärteil 0.

Eigenschaften
der Konjugation

Die Konjugation in $\mathbb{C}$ hat eine Reihe von Eigenschaften. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{\bar{z}_1} = z_1$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
4. Gilt $z_2 \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

K**Kontrollaufgabe 1.13: Konjugiert komplexe Zahlen**

Geben Sie jeweils die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ an:

a) $z = 3i$

b) $z = \frac{3}{4} - 5i$

1.6.6 Division komplexer Zahlen

Es seien zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 gegeben, wobei noch $z_2 \neq 0$ gefordert wird. Wenn nun der Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ berechnet werden soll, so bedeutet dies, dass der Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $\frac{z_1}{z_2}$ bestimmt werden soll. Dazu wird der Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ mit $\bar{z}_2$ erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Dann ist der Nenner eine reelle Zahl, und es kann der Real- und Imaginärteil berechnet werden.

Beispiel 1.24: Division einer komplexen Zahl mithilfe des multiplikativ Inversen

Wir berechnen den Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 1 - 2i$. Hierzu wird der Bruch mit $\overline{z_2} = 1 + 2i$ erweitert und wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \\ &= \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} \\ &= \frac{-4 + 7i}{5} = -0,8 + 1,4i.\end{aligned}$$

Also gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{2+3i}{1-2i}\right) = -0,8$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{2+3i}{1-2i}\right) = 1,4$.

B

Kontrollaufgabe 1.14: Division einer komplexen Zahl

Berechnen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = 4 - 2i$ und $z_2 = 6 + 8i$.

K

1.6.7 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen besitzen unterschiedliche Darstellungsformen, welche wir in diesem Abschnitt näher betrachten wollen. Diese unterschiedlichen Darstellungsformen für komplexe Zahlen lauten: (i) Kartesische Form, (ii) Trigonometrische Form oder Polarform und (iii) Exponentialform.

Kartesische Form

Die bisher verwendete Darstellung komplexer Zahlen heißt die *kartesische Form*. In dieser Form wird die komplexe Zahl als formale Summe ihres Real- und Imaginärteils geschrieben. Ihren Namen verdankt diese Darstellungsform der Tatsache, dass die kartesische Form die Koordinaten des zugehörigen Punktes in der Gaußschen Zahlenebene verwendet, und die Gaußsche Zahlenebene ist eben ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem.

kartesische Form

Beispiel 1.25: Kartesische Form

Wir betrachten die komplexe Zahl $z_1 = 2 + i$ und stellen diese in der kartesischen Form in der Gaußschen Zahlenebene dar.

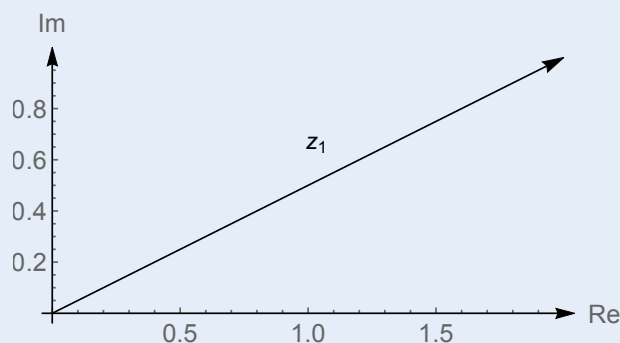


Abb. 1.10: Kartesische Form der komplexen Zahlen $z_1 = 2 + i$.

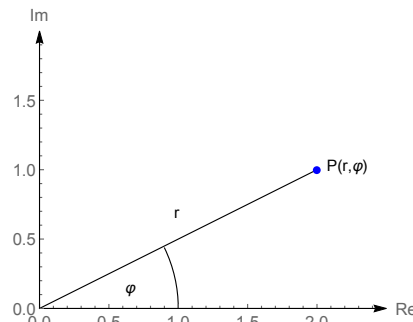
B

Trigonometrische Form oder Polarform

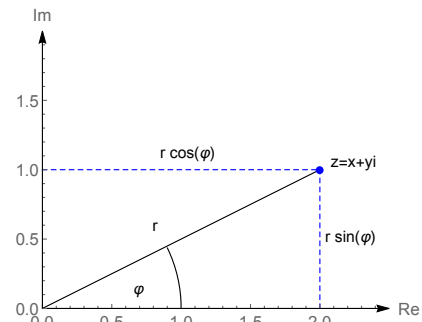
trigonometrische Form

Die *trigonometrische Form* verwendet die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus zur Beschreibung einer komplexen Zahl. Es sei eine komplexe Zahl in der kartesischen Schreibweise gegeben, etwa $z = x + yi$. Es wird $z \neq 0$ vorausgesetzt und wir betrachten das rechtwinklige Dreieck mit den Kanten $(0,0)(x,0)$, $(x,0),(x,y)$ und $(0,0)(x,y)$ (siehe auch Abbildung 1.11b).

Abb. 1.11: Herleitung der trigonometrischen Form einer komplexen Zahl.



(a) Komplexe Zahl in Polarkoordinaten



(b) Komplexe Zahl in kartesischer Form

Es wird mit r der Betrag von z bezeichnet (es gilt also $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$) und mit φ der Winkel zwischen den Kanten $(0,0)(x,0)$ und $(0,0)(x,y)$. Nach Definition der Funktionen $\sin$ und $\cos$ gelten dann folgende Beziehungen (siehe auch Abbildung 1.11b):

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}, \quad (1.9)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}. \quad (1.10)$$

Die Gleichungen (1.9) und (1.10) liefern die trigonometrische Darstellung von z , wenn diese Gleichungen nach x und y aufgelöst und in die kartesische Darstellung von z eingesetzt werden. Es gilt dann

$$z = x + yi = r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)i = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)). \quad (1.11)$$

Polarform Die Darstellung $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ heißt die *Polarform* oder *trigonometrische Form* der komplexen Zahl z . In der Polarform ist r der Betrag von z und φ ist der Winkel von z .

Bogenmaß In der Mathematik ist es üblich, Winkel nicht mit dem Gradmaß anzugeben, sondern mit dem *Bogenmaß*. Das Bogenmaß ist definiert als die Länge des Kreisbogens am Einheitskreis (also des Kreises vom Radius 1), die zu einem vorgegebenen Winkel gehört, wobei stets die Bogenlänge beginnend vom Punkt $(1,0)$ gegen den Uhrzeigersinn (d.h. in mathematisch positiver Richtung) berechnet wird (siehe Abbildung 1.12).

Rechter Winkel Wird nun etwa der rechte Winkel betrachtet, so hat dieser im Gradmaß die Größe 90° . Die Bogenlänge des rechten Winkels ist $\frac{\pi}{2}$ (da die Bogenlänge des vollen Kreisumfangs gleich 2π ist und der rechte Winkel ein Viertel des Vollwinkels ist). Im Bogenmaß hat der rechte Winkel daher die Größe $\frac{\pi}{2}$. Winkel im Bogenmaß sind dimensionslos. Das Vorzeichen von Winkeln wird so gezählt: Typischerweise wird von der positiven x -Achse ausgegangen. Bei Drehung gegen den Uhrzeigersinn wird der Winkel positiv gezählt, bei Drehung mit dem Uhrzeigersinn negativ. Die Winkel im Grad- und Bogenmaß sind in Abbildung 1.12 dargestellt.

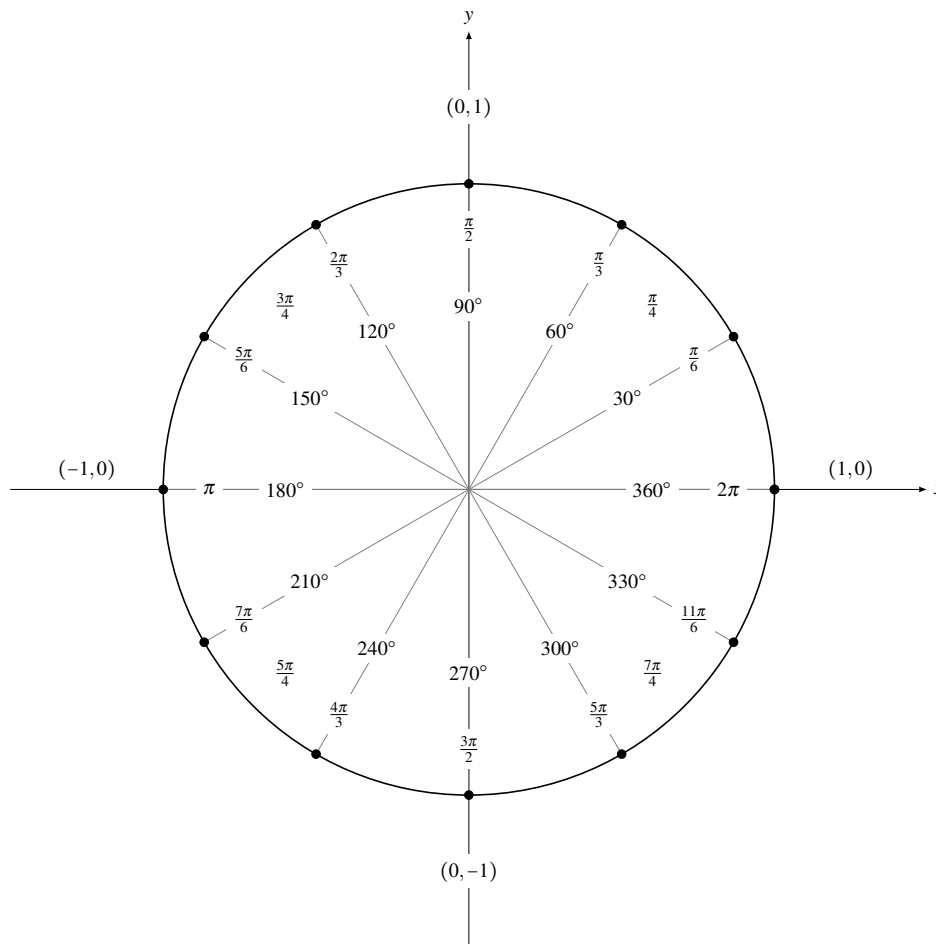


Abb. 1.12: Winkel im Grad- und Bogenmaß

Der Winkel φ in der Polarform wird üblicherweise aus dem halboffenen Intervall $]-\pi, \pi]$ gewählt. Dann ist φ für ein gegebenes z eindeutig. Es sollte klar sein, dass die Wahl $\varphi + 2k\pi$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die gleiche komplexe Zahl bezeichnet. Der Winkel φ heißt *Argument* der komplexen Zahl z , geschrieben als $\arg(z)$. Es wird stets $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ gewählt. Es ist auch zu beachten, dass die Zahl $z = 0$ kein Argument besitzt, da wegen $r = 0$ jeder Winkel φ eingesetzt werden könnte.

Argument

In der Polarform wird eine komplexe Zahl $z \neq 0$ also beschrieben durch ein 2-Tupel $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$, die Zahl $z = 0$ wird durch $r = 0$ beschrieben. Das sind die Koordinaten der komplexen Zahl in Polarform.

Koordinaten

Die Umrechnung in die kartesische Form erfolgt gemäß der Gleichungen (1.9) und (1.10). Sind r sowie φ gegeben, so erhalten wir die kartesischen Koordinaten mittels $x = r \cos(\varphi)$ sowie $y = r \sin(\varphi)$. Da die Umrechnung für $z = 0$ trivial ist, wird im Folgenden $z \neq 0$ vorausgesetzt.

Umrechnung Polarform in kartesische Form

Nun sei $z \neq 0$ in der kartesischen Form gegeben. Es sei also $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es wird die Polarform berechnet. Es muss also der Betrag r und der Winkel φ bestimmt werden, um z in der Polarform darzustellen. Für den Betrag ist aus Definition 1.10 die Formel $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bekannt. Um den Winkel φ aus dem bekannten Realteil x und Imaginärteil y zu berechnen, wird Abbildung 1.12 betrachtet. Es werden folgende Fälle unterschieden:

Umrechnung kartesische Form in Polarform

1. Gilt $x = 0$, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $y > 0$ gesetzt und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ für $y < 0$.
2. Gilt $y = 0$, so wird $\varphi = 0$ für $x > 0$ und $\varphi = \pi$ gesetzt für $x < 0$.

3. Nun seien $x \neq 0 \neq y$. Es wird das Dreieck in Abbildung 1.11 betrachtet. Es gilt $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$, also $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$. Allerdings gilt $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$, so dass also nicht eindeutig aus dem Wert $\frac{y}{x}$ mittels der Arcustangensfunktion der Winkel φ berechnet werden kann. Also müssen wir Teilintervalle von $]-\pi, \pi[$ betrachten, auf denen wir jeweils den Wert $\frac{y}{x}$ eindeutig zu einem Winkel φ zurückrechnen können.

Meist wird das Teilintervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gewählt. Die Arcustangensfunktion nimmt daher nur Funktionswerte im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ an. Das sind aber nur komplexe Zahlen im ersten und vierten Quadranten. Liegt zum Beispiel $z = x + yi$ im ersten Quadranten (es gilt also $x > 0$ und $y > 0$), so ergibt sich für die komplexe Zahl $-z = -x - yi$ der gleiche Wert für den Quotienten $\frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$. Es gilt daher $\tan(\frac{y}{x}) = \tan(\frac{-y}{-x})$. Die Arcustangensfunktion liefert aber nur den Winkel zur Zahl z im ersten Quadranten. Die Zahl $-z$ liegt allerdings im dritten Quadranten. Wenn daher der Winkel zu $-z$ gesucht wird, dann ist zu erkennen, dass $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ gilt. Daher wird $\varphi = \arctan(\frac{-y}{-x}) - \pi$ gesetzt. Ähnlich wird mit komplexen Zahlen im zweiten Quadranten verfahren.

Zusammenfassend ergibt sich die Tabelle 1.1 zur Bestimmung des Argumentes.

Tabelle 1.1: Bestimmung des Argumentes für komplexe Zahlen in Polarform

	$x > 0$	$x < 0, y > 0$	$x < 0, y < 0$	$x = 0$ $y > 0$	$x = 0$ $y < 0$	$x > 0$ $y = 0$	$x < 0$ $y = 0$
$\varphi =$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	π

B

Beispiel 1.26: Umrechnung kartesischer Form zu Polarform (1. Quadrant)

Wir formen die in kartesischer Form vorliegende komplexe Zahl $z = 1 + \sqrt{3}i$ in Polarform um:

Der Realteil beträgt $\operatorname{Re}(z) = 1$ und der Imaginärteil beträgt $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{3}$. Wir bestimmen den Betrag bzw. r der komplexen Zahl z mit $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Da die komplexe Zahl der Form $z = x + yi$ gegeben ist, lässt sich das Argument von z mithilfe des Tangens bzw. dessen Umkehrfunktion Arkustangens an Hand von Tabelle 1.1 berechnen: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ mit $x > 0$ und $y > 0$.

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Somit lautet die komplexe Zahl $z = 1 + \sqrt{3}i$ in Polarform:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}))$$

In Beispiel 1.26 haben wir die Umformung einer komplexen Zahl, die in der kartesischen Form gegeben ist, hin zur Polarform durchgeführt. Diese komplexe Zahl befindet sich im ersten Quadranten des Koordinatensystems. Die Umformung kom-

plexer Zahlen, die sich in anderen Quadranten befinden, erfolgt unter Anpassung des Argumentes mithilfe der Tabelle 1.1.

B

Beispiel 1.27: Umrechnung kartesische Form zu Polarform (allgemein)

Wir formen die in kartesischer Form vorliegenden komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ sowie $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$ hin zur Polarform um:

Der Betrag ist bereits aus Beispiel 1.26 bekannt und lautet für alle vier Zahlen $r = 2$. In Abbildung 1.13 ist erkennbar, dass die vier komplexen Zahlen zwar den gleichen Betrag $|z|$ besitzen, aber in unterschiedlichen Quadranten liegen.

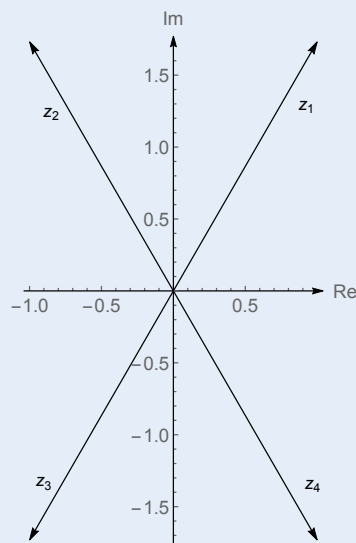


Abb. 1.13: Bestimmung des Polarwinkels der komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 und z_4 .

Die Argumente der komplexen Zahlen lauten:

$$\varphi_{z_1} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_{z_2} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\varphi_{z_3} = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\varphi_{z_4} = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

Die komplexen Zahlen in Polarform lauten also wie folgt:

$$z_1 = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_2 = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_3 = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_4 = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

K

Kontrollaufgabe 1.15: Umrechnung kartesische Form zu Polarform

Berechnen Sie die Polarform der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z = 1 + i$

c) $z = -7$

b) $z = i$

Die einfachere Richtung ist die Umrechnung von der Polarform in die kartesische Form. Dazu sei z zunächst in der trigonometrischen Form (r, φ) gegeben. Die kartesische Form $x + yi$ ergibt sich, indem der Realteil $x = r \cos(\varphi)$ und der Imaginärteil $y = r \sin(\varphi)$ berechnet werden.

B

Beispiel 1.28: Umrechnung Polarform zu kartesischer Form

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 4 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{6}))$. Wir berechnen die kartesische Form wie folgt:

$$\begin{aligned} z &= 4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= 2\sqrt{3} - 2i \end{aligned}$$

K

Kontrollaufgabe 1.16: Umrechnung Polarform zu kartesischer Form

Berechnen Sie die kartesische Form der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z = -3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

b) $z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

Exponentialform

Zuletzt wird die *Exponentialform* betrachtet. Diese hängt eng mit der Polarform zusammen. Um die Exponentialform abzuleiten, werden die folgenden Zusammenhänge für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet:

Exponentialform

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}).\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit i und Addition der Gleichungen liefert den Zusammenhang

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (1.12)$$

Die Darstellung der Funktion e^{ix} in Gleichung (1.12) wird auch *Eulersche Formel* genannt.

Eulersche Formel

Es sei $z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)$ in Polarform gegeben. Aus Gleichung (1.12) ergibt sich unmittelbar die Exponentialdarstellung

Umrechnung Polarform in Exponentialform

$$z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = r \cdot e^{i\varphi}. \quad (1.13)$$

Da wir die Umrechnung von der kartesischen in die Polarform eben kennengelernt haben, können wir auch von der kartesischen in die Exponentialform umformen, wie Sie es in Beispiel 1.29 sehen.

Beispiel 1.29: Umrechnung kartesische Form in Exponentialform

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = -1 + i$ in kartesischer Form, sie liegt im zweiten Quadranten (das ist wichtig, wenn wir gleich das Argument von z berechnen). Wir bestimmen Betrag und Argument wie folgt:

$$\begin{aligned}z &= -1 + i \\ r &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Die komplexe Zahl $z = -1 + i$ in Exponentialform lautet: $z = r \cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

B**Beispiel 1.30: Umrechnung Exponentialform in kartesische Form**

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ in Exponentialform. Wir berechnen die kartesische Form wie folgt:

$$\begin{aligned}z &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3} + i\end{aligned}$$

B

Die komplexe Zahl $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ lautet in kartesischer Form: $\sqrt{3} + i$. Sie liegt im ersten Quadranten.

K

Kontrollaufgabe 1.17: Umrechnung kartesische Form in Exp.-Form

Geben Sie für die folgenden komplexen Zahlen jeweils die Exponentialform an:

a) $z = 2 - 5i$

b) $z = \sqrt{5}i$

K

Kontrollaufgabe 1.18: Umrechnung Exp.-Form in kartesische Form

Geben Sie für die folgenden komplexen Zahlen jeweils die kartesische Form an:

a) $z = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{6}}$

b) $z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

Multiplikation Sind $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ zwei komplexe Zahlen in Exponentialform, so folgt aus den Potenzgesetzen für das Produkt in Exponentialdarstellung $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Multiplikation komplexer Zahlen in Exponentialform ist also sehr einfach.

B

Beispiel 1.31: Multiplikation komplexer Zahlen in Exponentialform

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ und $z_2 = 5e^{i\frac{4\pi}{9}}$. Wir multiplizieren die beiden komplexen Zahlen wie folgt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= (3 \cdot 5) \cdot e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{9})} \\ &= 15e^{i\frac{11\pi}{18}} \end{aligned}$$

Division Für die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ ergibt sich $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

B

Beispiel 1.32: Division komplexer Zahlen in Exponentialform

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 8e^{i\frac{4\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Wir dividieren die beiden komplexen Zahlen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \frac{8}{2} \cdot e^{i(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{12})} \\ &= 4 \cdot e^{i(\frac{11\pi}{12})} \end{aligned}$$

1.7 Zusammenfassung

Ziel dieses Studienbriefes ist es, Grundlagen für die weiterführenden Themen zu schaffen. Zunächst haben wir den Mengenbegriff eingeführt und allgemeine

Grundlagen der Mengenlehre geschaffen. Wir haben elementare Zahlenmengen unseres Anschauungsraumes behandelt und dabei insbesondere die Menge der reellen Zahlen betrachtet. Einige der Eigenschaften reeller Zahlen haben wir auf die komplexen Zahlen übertragen. Wir haben die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und die Division mit komplexen Zahlen kennengelernt und angewendet. Weiterhin haben wir die unterschiedlichen Darstellungsformen der komplexen Zahlen betrachtet und können die komplexen Zahlen von einer Darstellungsform in eine andere umrechnen.

1.8 Übungsaufgaben

Ü

Übung 1.1: Mengen

Stellen Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form dar:

- Die Menge der positiven Primzahlen größer als 13 und kleiner als 70.
- $\{x \mid x = 2n < 20, n \in \mathbb{N}\}$.
- $-\mathbb{N}$

Ü

Übung 1.2: Mengen

Gegeben sind die Mengen A, B und C. Zeigen Sie:

- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ü

Übung 1.3: Mengen

Gegeben sind die Teilmengen A, B, C aus $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 + 1\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 2\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\} \end{aligned}$$

Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die Menge

$$A \cap (B \cup C).$$

Ü

Übung 1.4: Mengen

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen M_1 und M_2 jeweils die Vereinigung $M_1 \cup M_2$, die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ sowie die Komplementmengen $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$. Geben Sie auch an, ob M_1 Teil- oder Obermenge von M_2 ist.

- $M_1 := \{10, 8, 3, -2, \pi\}$ und $M_2 := \{e, x, 8, 10\}$.
- $M_1 := \{x \mid x = 2n < 20, n \in \mathbb{N}\}$ und $M_2 := \{x \mid x = 3n < 20, n \in \mathbb{N}\}$.

Ü

Übung 1.5: Mengen

Stellen Sie die folgenden Punktmengen grafisch dar:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 1 = x\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 1 \leq x\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x + y - 1 < 6\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{|x|, |y|\} \geq 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \geq 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{|x|, |y|\} \leq 3\}$

Übung 1.6: Mengen

Es sei M eine Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M . Bestimmen Sie $\mathcal{P}(M)$ und $|\mathcal{P}(M)|$ für die folgenden Mengen M :

$$M = \emptyset \quad M = \{1, y\} \quad M = \{a, c, e\} .$$

Suchen Sie eine Formel für $|\mathcal{P}(M)|$, falls M eine endliche Menge der Ordnung n ist.

Ü

Ü

Übung 1.7: Ungleichungen

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen. Zeichnen Sie die Lösungsmenge als Teilmenge der Zahlengerade.

a) $x^2 - 5x - 1 < 9 - 2x$

c) $||x| - |2|| < 1$

b) $|x + 4| \leq |x - 2|$

d) $x^5 - 30 < 2$

Ü

Übung 1.8: Zahlen

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

b) Es gibt eine kleinste ganze Zahl.

c) Es gibt eine kleinste positive ganze Zahl.

d) Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl.

Versuchen Sie jeweils, Ihre Antwort zu begründen.

Ü

Übung 1.9: Komplexe Zahlen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (geben Sie insbesondere Real- und Imaginärteil des Ergebnisses an) *ohne* Zuhilfenahme des Rechners. Zeichnen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene ein.

a) $(-1 - 2i)^3$

c) $\frac{-1 - 2i^{13}}{2i^2 + 2i - 2}$

b) $(-1 - 2i)^{20}$

Ü

Übung 1.10: Komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$. Berechnen Sie

a) $z_3 = z_1 + z_2$

c) $z_5 = z_1 \cdot z_2$

b) $z_4 = z_1 - z_2$

Bestimmen Sie für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils $|z_n|$ sowie $\arg(z_n)$ und stellen Sie die z_n in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Hinweise:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $z = a + bi$
- $\varphi(z) = \arctan(\frac{b}{a})$
- Da $\sqrt{-1} = i$ gilt $i^2 = -1$

Anhang

A. Lizenztext



Creative Commons Legal Code

Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland



CREATIVE COMMONS IST KEINE RECHTSANWALTSKANZLEI UND LEISTET KEINE RECHTSBERATUNG. DIE BEREITSTELLUNG DIESER LIZENZ FÜHRT ZU KEINEM MANDATSV ERHÄLTNIS. CREATIVE COMMONS STELLT DIESE INFORMATIONEN OHNE GEWÄHR ZUR VERFÜGUNG. CREATIVE COMMONS ÜBERNIMMT KEINE GEWÄHRLEISTUNG FÜR DIE GELIEFERTEN INFORMATIONEN UND SCHLIEßT DIE HAFTUNG FÜR SCHÄDEN AUS, DIE SICH AUS DEREN GEBRAUCH ERGEBEN.

Lizenz

DER GEGENSTAND DIESER LIZENZ (WIE UNTER "SCHUTZGEGENSTAND" DEFINIERT) WIRD UNTER DEN BEDINGUNGEN DIESER CREATIVE COMMONS PUBLIC LICENSE ("CCPL", "LIZENZ" ODER "LIZENZVERTRAG") ZUR VERFÜGUNG GESTELLT. DER SCHUTZGEGENSTAND IST DURCH DAS URHEBERRECHT UND/ODER ANDERE GESETZE GESCHÜTZT. JEDE FORM DER NUTZUNG DES SCHUTZGEGENSTANDES, DIE NICHT AUFGRUND DIESER LIZENZ ODER DURCH GESETZE GESTATTET IST, IST UNZULÄSSIG.

DURCH DIE AUSÜBUNG EINES DURCH DIESE LIZENZ GEWÄHRTEN RECHTS AN DEM SCHUTZGEGENSTAND ERKLÄREN SIE SICH MIT DEN LIZENZBEDINGUNGEN RECHTSVERBINDLICH EINVERSTANDEN. SOWEIT DIESE LIZENZ ALS LIZENZVERTRAG ANZUSEHEN IST, GEWÄHRT IHNEN DER LIZENZGEBER DIE IN DER LIZENZ GENANNTE RECHTE UNENTGELTLICH UND IM AUSTAUSCH DAFÜR, DASS SIE DAS GEBUNDENSEIN AN DIE LIZENZBEDINGUNGEN AKZEPTIEREN.

1. Definitionen

- a. Der Begriff "**Abwandlung**" im Sinne dieser Lizenz bezeichnet das Ergebnis jeglicher Art von Veränderung des Schutzgegenstandes, solange die eigenpersönlichen Züge des Schutzgegenstandes darin nicht verblassen und daran eigene Schutzrechte entstehen. Das kann insbesondere eine Bearbeitung, Umgestaltung, Änderung, Anpassung, Übersetzung oder Heranziehung des Schutzgegenstandes zur Vertonung von Laufbildern sein. Nicht als Abwandlung des Schutzgegenstandes gelten seine Aufnahme in eine Sammlung oder ein Sammelwerk und die freie Benutzung des Schutzgegenstandes.
- b. Der Begriff "**Sammelwerk**" im Sinne dieser Lizenz meint eine Zusammenstellung von literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalten, sofern diese Zusammenstellung aufgrund von Auswahl und Anordnung der darin enthaltenen selbständigen Elemente eine geistige Schöpfung darstellt, unabhängig davon, ob die Elemente systematisch oder methodisch angelegt und dadurch einzeln zugänglich sind oder nicht.
- c. "**Verbreiten**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, den Schutzgegenstand oder Abwandlungen im Original oder in Form von Vervielfältigungsstücken, mithin in körperlich fixierter Form der Öffentlichkeit anzubieten oder in Verkehr zu bringen.
- d. Unter "**Lizenzelementen**" werden im Sinne dieser Lizenz die folgenden übergeordneten Lizenzcharakteristika verstanden, die vom Lizenzgeber ausgewählt wurden und in der Bezeichnung der Lizenz zum Ausdruck kommen: "Namensnennung", "Weitergabe unter gleichen Bedingungen".
- e. Der "**Lizenzgeber**" im Sinne dieser Lizenz ist diejenige natürliche oder juristische Person oder Gruppe, die den Schutzgegenstand unter den Bedingungen dieser Lizenz anbietet und insoweit als Rechteinhaberin auftritt.
- f. "**Rechteinhaber**" im Sinne dieser Lizenz ist der Urheber des Schutzgegenstandes oder jede andere natürliche oder juristische Person oder Gruppe von Personen, die am Schutzgegenstand ein Immaterialgüterrecht erlangt hat, welches die in Abschnitt 3 genannten Handlungen erfasst und bei dem eine Einräumung von Nutzungsrechten oder eine Weiterübertragung an Dritte möglich ist.
- g. Der Begriff "**Schutzgegenstand**" bezeichnet in dieser Lizenz den literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalt, der unter den Bedingungen dieser Lizenz angeboten wird. Das kann insbesondere eine persönliche geistige Schöpfung jeglicher Art, ein Werk der kleinen Münze, ein nachgelassenes Werk oder auch ein Lichtbild oder anderes Objekt eines verwandten Schutzrechts sein, unabhängig von der Art seiner Fixierung und unabhängig davon, auf welche Weise jeweils eine Wahrnehmung erfolgen kann, gleichviel ob in analoger oder digitaler Form.

Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, unterfallen auch sie dem Begriff "Schutzgegenstand" im Sinne dieser Lizenz.

- h. Mit "**Sie**" bzw. "**Ihnen**" ist die natürliche oder juristische Person gemeint, die in dieser Lizenz im Abschnitt 3 genannte Nutzungen des Schutzgegenstandes vornimmt und zuvor in Hinblick auf den Schutzgegenstand nicht gegen Bedingungen dieser Lizenz verstoßen oder aber die ausdrückliche Erlaubnis des Lizenzgebers erhalten hat, die durch diese Lizenz gewährten Nutzungsrechte trotz eines vorherigen Verstoßes auszuüben.
- i. Unter "**Öffentlich Zeigen**" im Sinne dieser Lizenz sind Veröffentlichungen und Präsentationen des Schutzgegenstandes zu verstehen, die für eine Mehrzahl von Mitgliedern der Öffentlichkeit bestimmt sind und in unkörperlicher Form mittels öffentlicher Wiedergabe in Form von Vortrag, Aufführung, Vorführung, Darbietung, Sendung, Weitersendung, zeit- und ortsunabhängiger Zugänglichmachung oder in körperlicher Form mittels Ausstellung erfolgen, unabhängig von bestimmten Veranstaltungen und unabhängig von den zum Einsatz kommenden Techniken und Verfahren, einschließlich drahtgebundener oder drahtloser Mittel und Einstellen in das Internet.
- j. "**Vervielfältigen**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, mittels beliebiger Verfahren Vervielfältigungsstücke des Schutzgegenstandes herzustellen, insbesondere durch Ton- oder Bildaufzeichnungen, und umfasst auch den Vorgang, erstmals körperliche Fixierungen des Schutzgegenstandes sowie Vervielfältigungsstücke dieser Fixierungen anzufertigen, sowie die Übertragung des Schutzgegenstandes auf einen Bild- oder Tonträger oder auf ein anderes elektronisches Medium, gleichviel ob in digitaler oder analoger Form.
- k. "**Mit Creative Commons kompatible Lizenz**" bezeichnet eine Lizenz, die unter <https://creativecommons.org/compatiblelicenses> aufgelistet ist und die durch Creative Commons als grundsätzlich zur vorliegenden Lizenz äquivalent akzeptiert wurde, da zumindest folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

Diese mit Creative Commons kompatible Lizenz

- i. enthält Bestimmungen, welche die gleichen Ziele verfolgen, die gleiche Bedeutung haben und die gleichen Wirkungen erzeugen wie die Lizenzelemente der vorliegenden Lizenz; und
- ii. erlaubt ausdrücklich das Lizenzieren von ihr unterstellten Abwandlungen unter vorliegender Lizenz, unter einer anderen rechtsordnungsspezifisch angepassten Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen, wie sie die vorliegende Lizenz aufweist, oder unter der entsprechenden Creative-Commons-Unported-Lizenz.

2. Schranken des Immaterialgüterrechts

Diese Lizenz ist in keiner Weise darauf gerichtet, Befugnisse zur Nutzung des Schutzgegenstandes zu vermindern, zu beschränken oder zu vereiteln, die Ihnen aufgrund der Schranken des Urheberrechts oder anderer Rechtsnormen bereits ohne Weiteres zustehen oder sich aus dem Fehlen eines immaterialgüterrechtlichen Schutzes ergeben.

3. Einräumung von Nutzungsrechten

Unter den Bedingungen dieser Lizenz räumt Ihnen der Lizenzgeber - unbeschadet unverzichtbarer Rechte und vorbehaltlich des Abschnitts 3.e) - das vergütungsfreie, räumlich und zeitlich (für die Dauer des Schutzrechts am Schutzgegenstand) unbeschränkte einfache Recht ein, den Schutzgegenstand auf die folgenden Arten und Weisen zu nutzen ("unentgeltlich eingeräumtes einfaches Nutzungsrecht für jedermann"):

- a. Den Schutzgegenstand in beliebiger Form und Menge zu vervielfältigen, ihn in Sammelwerke zu integrieren und ihn als Teil solcher Sammelwerke zu vervielfältigen;
- b. Abwandlungen des Schutzgegenstandes anzufertigen, einschließlich Übersetzungen unter Nutzung jedweder Medien, sofern deutlich erkennbar gemacht wird, dass es sich um Abwandlungen handelt;
- c. den Schutzgegenstand, allein oder in Sammelwerke aufgenommen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten;
- d. Abwandlungen des Schutzgegenstandes zu veröffentlichen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten.
- e. Bezüglich Vergütung für die Nutzung des Schutzgegenstandes gilt Folgendes:
 - i. **Unverzichtbare gesetzliche Vergütungsansprüche:** Soweit unverzichtbare Vergütungsansprüche im Gegenzug für gesetzliche Lizenzen vorgesehen oder Pauschalabgabensysteme (zum Beispiel für Leermedien) vorhanden sind, behält sich der Lizenzgeber das ausschließliche Recht vor, die entsprechende Vergütung einzuziehen für jede Ausübung eines Rechts aus dieser Lizenz durch Sie.
 - ii. **Vergütung bei Zwangslizenzen:** Sofern Zwangslizenzen außerhalb dieser Lizenz vorgesehen sind und zustande kommen, verzichtet der Lizenzgeber für alle Fälle einer lizenzgerechten Nutzung des Schutzgegenstandes durch Sie auf jegliche Vergütung.
 - iii. **Vergütung in sonstigen Fällen:** Bezüglich lizenzgerechter Nutzung des

Schutzgegenstandes durch Sie, die nicht unter die beiden vorherigen Abschnitte (i) und (ii) fällt, verzichtet der Lizenzgeber auf jegliche Vergütung, unabhängig davon, ob eine Einziehung der Vergütung durch ihn selbst oder nur durch eine Verwertungsgesellschaft möglich wäre.

Das vorgenannte Nutzungsrecht wird für alle bekannten sowie für alle noch nicht bekannten Nutzungsarten eingeräumt. Es beinhaltet auch das Recht, solche Änderungen am Schutzgegenstand vorzunehmen, die für bestimmte nach dieser Lizenz zulässige Nutzungen technisch erforderlich sind. Alle sonstigen Rechte, die über diesen Abschnitt hinaus nicht ausdrücklich durch den Lizenzgeber eingeräumt werden, bleiben diesem allein vorbehalten. Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten Schutzgegenstand dieser Lizenz oder Teil dessen sind und einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, verzichtet der Lizenzgeber auf sämtliche aus diesem Schutz resultierenden Rechte.

4. Bedingungen

Die Einräumung des Nutzungsrechts gemäß Abschnitt 3 dieser Lizenz erfolgt ausdrücklich nur unter den folgenden Bedingungen:

- a. Sie dürfen den Schutzgegenstand ausschließlich unter den Bedingungen dieser Lizenz verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie müssen dabei stets eine Kopie dieser Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen dieser Lizenz oder die durch diese Lizenz gewährten Rechte beschränken. Sie dürfen den Schutzgegenstand nicht unterlizenzieren. Bei jeder Kopie des Schutzgegenstandes, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise unverändert lassen, die auf diese Lizenz und den Haftungsausschluss hinweisen. Wenn Sie den Schutzgegenstand verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf den Schutzgegenstand) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer des Schutzgegenstandes in der Ausübung der ihm durch diese Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.a) gilt auch für den Fall, dass der Schutzgegenstand einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt dieser Lizenz unterstellt werden muss. Sofern Sie ein Sammelwerk erstellen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin aus dem Sammelwerk die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen. Wenn Sie eine Abwandlung vornehmen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin von der Abwandlung die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen.
- b. Sie dürfen eine Abwandlung ausschließlich unter den Bedingungen
 - i. dieser Lizenz,
 - ii. einer späteren Version dieser Lizenz mit denselben Lizenzelementen,
 - iii. einer rechtsordnungsspezifischen Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts (z.B. Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 US),
 - iv. der Creative-Commons-Unported-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts, oder
 - v. einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz

verbreiten oder öffentlich zeigen.

Falls Sie die Abwandlung gemäß Abschnitt (v) unter einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen Folge leisten.

Falls Sie die Abwandlungen unter einer der unter (i)-(iv) genannten Lizenzen ("Verwendbare Lizenzen") lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen sowie folgenden Bestimmungen Folge leisten: Sie müssen stets eine Kopie der verwendbaren Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen, wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen der verwendbaren Lizenz oder die durch sie gewährten Rechte beschränken. Bei jeder Abwandlung, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise auf die verwendbare Lizenz und den Haftungsausschluss unverändert lassen. Wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf die Abwandlung) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer der Abwandlung in der Ausübung der ihm durch die verwendbare Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.b) gilt auch für den Fall, dass die Abwandlung einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt der verwendbaren Lizenz unterstellt werden muss.

- c. Die Verbreitung und das öffentliche Zeigen des Schutzgegenstandes oder auf ihm aufbauender Abwandlungen oder ihn enthaltender Sammelwerke ist Ihnen nur unter der Bedingung gestattet, dass Sie, vorbehaltlich etwaiger Mitteilungen im Sinne von Abschnitt 4.a), alle dazu gehörenden

Rechtevermerke unberührt lassen. Sie sind verpflichtet, die Rechteinhaberschaft in einer der Nutzung entsprechenden, angemessenen Form anzuerkennen, indem Sie - soweit bekannt - Folgendes angeben:

- i. Den Namen (oder das Pseudonym, falls ein solches verwendet wird) des Rechteinhabers und / oder, falls der Lizenzgeber im Rechtevermerk, in den Nutzungsbedingungen oder auf andere angemessene Weise eine Zuschreibung an Dritte vorgenommen hat (z.B. an eine Stiftung, ein Verlagshaus oder eine Zeitung) ("Zuschreibungsempfänger"), Namen bzw. Bezeichnung dieses oder dieser Dritten;
- ii. den Titel des Inhaltes;
- iii. in einer praktikablen Form den Uniform-Resource-Identifier (URI, z.B. Internetadresse), den der Lizenzgeber zum Schutzgegenstand angegeben hat, es sei denn, dieser URI verweist nicht auf den Rechtevermerk oder die Lizenzinformationen zum Schutzgegenstand;
- iv. und im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes in Übereinstimmung mit Abschnitt 3.b) einen Hinweis darauf, dass es sich um eine Abwandlung handelt.

Die nach diesem Abschnitt 4.c) erforderlichen Angaben können in jeder angemessenen Form gemacht werden; im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes oder eines Sammelwerkes müssen diese Angaben das Minimum darstellen und bei gemeinsamer Nennung mehrerer Rechteinhaber dergestalt erfolgen, dass sie zumindest ebenso hervorgehoben sind wie die Hinweise auf die übrigen Rechteinhaber. Die Angaben nach diesem Abschnitt dürfen Sie ausschließlich zur Angabe der Rechteinhaberschaft in der oben bezeichneten Weise verwenden. Durch die Ausübung Ihrer Rechte aus dieser Lizenz dürfen Sie ohne eine vorherige, separat und schriftlich vorliegende Zustimmung des Lizenzgebers und / oder des Zuschreibungsempfängers weder explizit noch implizit irgendeine Verbindung zum Lizenzgeber oder Zuschreibungsempfänger und ebenso wenig eine Unterstützung oder Billigung durch ihn andeuten.

- d. Die oben unter 4.a) bis c) genannten Einschränkungen gelten nicht für solche Teile des Schutzgegenstandes, die allein deshalb unter den Schutzgegenstandsbegriff fallen, weil sie als Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen.
- e. Persönlichkeitsrechte bleiben - soweit sie bestehen - von dieser Lizenz unberührt.

5. Gewährleistung

SO FERN KEINE ANDERS LAUTENDE, SCHRIFTLICHE VEREINBARUNG ZWISCHEN DEM LIZENZGEBER UND IHNEN GESCHLOSSEN WURDE UND SOWEIT MÄNGEL NICHT ARGLISTIG VERSCHWIEGEN WURDEN, BIETET DER LIZENZGEBER DEN SCHUTZGEGENSTAND UND DIE EINRÄUMUNG VON RECHTEN UNTER AUSSCHLUSS JEDLICHER GEWÄHRLEISTUNG AN UND ÜBERNIMMT WEDER AUSDRÜCKLICH NOCH KONKLUDENT GARANTIE IRGEND EINER ART. DIES UMFASST INSBESONDERE DAS FREISEIN VON SACH- UND RECHTSMÄNGELN, UNABHÄNGIG VON DEREN ERKENNBARKEIT FÜR DEN LIZENZGEBER, DIE VERKEHRSFÄHIGKEIT DES SCHUTZGEGENSTANDES, SEINE VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK SOWIE DIE KORREKTHEIT VON BESCHREIBUNGEN. DIESE GEWÄHRLEISTUNGSBESCHRÄNKUNG GILT NICHT, SOWEIT MÄNGEL ZU SCHÄDEN DER IN ABSCHNITT 6 BEZEICHNETEN ART FÜHREN UND AUF SEITEN DES LIZENZGEBERS DAS JEWEILS GENANNT VERSCHULDEN BZW. VERTRETENMÜSSEN EBENFALLS VORLIEGT.

6. Haftungsbeschränkung

DER LIZENZGEBER HAFTET IHNEN GEGENÜBER IN BEZUG AUF SCHÄDEN AUS DER VERLETZUNG DES LEBENS, DES KÖRPERS ODER DER GESUNDHEIT NUR, SO FERN IHM WENIGSTENS FAHRLÄSSIGKEIT VORZUWERFEN IST, FÜR SONSTIGE SCHÄDEN NUR BEI GROBER FAHRLÄSSIGKEIT ODER VORSATZ, UND ÜBERNIMMT DARÜBER HINAUS KEINERLEI FREIWILLIGE HAFTUNG.

7. Erlöschen

- a. Diese Lizenz und die durch sie eingeräumten Nutzungsrechte erlöschen mit Wirkung für die Zukunft im Falle eines Verstoßes gegen die Lizenzbedingungen durch Sie, ohne dass es dazu der Kenntnis des Lizenzgebers vom Verstoß oder einer weiteren Handlung einer der Vertragsparteien bedarf. Mit natürlichen oder juristischen Personen, die Abwandlungen des Schutzgegenstandes oder diesen enthaltende Sammelwerke unter den Bedingungen dieser Lizenz von Ihnen erhalten haben, bestehen nachträglich entstandene Lizenzbeziehungen jedoch solange weiter, wie die genannten Personen sich ihrerseits an sämtliche Lizenzbedingungen halten. Darüber hinaus gelten die Ziffern 1, 2, 5, 6, 7, und 8 auch nach einem Erlöschen dieser Lizenz fort.
- b. Vorbehaltlich der oben genannten Bedingungen gilt diese Lizenz unbefristet bis der rechtliche Schutz für den Schutzgegenstand ausläuft. Davon abgesehen behält der Lizenzgeber das Recht, den Schutzgegenstand unter anderen Lizenzbedingungen anzubieten oder die eigene Weitergabe des Schutzgegenstandes jederzeit einzustellen, solange die Ausübung dieses Rechts nicht einer

Kündigung oder einem Widerruf dieser Lizenz (oder irgendeiner Weiterlizenzierung, die auf Grundlage dieser Lizenz bereits erfolgt ist bzw. zukünftig noch erfolgen muss) dient und diese Lizenz unter Berücksichtigung der oben zum Erlöschen genannten Bedingungen vollumfänglich wirksam bleibt.

8. Sonstige Bestimmungen

- a. Jedes Mal wenn Sie den Schutzgegenstand für sich genommen oder als Teil eines Sammelwerkes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
- b. Jedes Mal wenn Sie eine Abwandlung des Schutzgegenstandes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz am ursprünglichen Schutzgegenstand zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
- c. Sollte eine Bestimmung dieser Lizenz unwirksam sein, so bleibt davon die Wirksamkeit der Lizenz im Übrigen unberührt.
- d. Keine Bestimmung dieser Lizenz soll als abbedungen und kein Verstoß gegen sie als zulässig gelten, solange die von dem Verzicht oder von dem Verstoß betroffene Seite nicht schriftlich zugestimmt hat.
- e. Diese Lizenz (zusammen mit in ihr ausdrücklich vorgesehenen Erlaubnissen, Mitteilungen und Zustimmungen, soweit diese tatsächlich vorliegen) stellt die vollständige Vereinbarung zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen in Bezug auf den Schutzgegenstand dar. Es bestehen keine Abreden, Vereinbarungen oder Erklärungen in Bezug auf den Schutzgegenstand, die in dieser Lizenz nicht genannt sind. Rechtsgeschäftliche Änderungen des Verhältnisses zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen sind nur über Modifikationen dieser Lizenz möglich. Der Lizenzgeber ist an etwaige zusätzliche, einseitig durch Sie übermittelte Bestimmungen nicht gebunden. Diese Lizenz kann nur durch schriftliche Vereinbarung zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber modifiziert werden. Derlei Modifikationen wirken ausschließlich zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen und wirken sich nicht auf die Dritten gemäß Ziffern 8.a) und b) angebotenen Lizenzen aus.
- f. Sofern zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber keine anderweitige Vereinbarung getroffen wurde und soweit Wahlfreiheit besteht, findet auf diesen Lizenzvertrag das Recht der Bundesrepublik Deutschland Anwendung.

Creative Commons Notice

Creative Commons ist nicht Partei dieser Lizenz und übernimmt keinerlei Gewähr oder dergleichen in Bezug auf den Schutzgegenstand. Creative Commons haftet Ihnen oder einer anderen Partei unter keinem rechtlichen Gesichtspunkt für irgendwelche Schäden, die - abstrakt oder konkret, zufällig oder vorhersehbar - im Zusammenhang mit dieser Lizenz entstehen. Unbeschadet der vorangegangenen beiden Sätze, hat Creative Commons alle Rechte und Pflichten eines Lizenzgebers, wenn es sich ausdrücklich als Lizenzgeber im Sinne dieser Lizenz bezeichnet.

Creative Commons gewährt den Parteien nur insoweit das Recht, das Logo und die Marke "Creative Commons" zu nutzen, als dies notwendig ist, um der Öffentlichkeit gegenüber kenntlich zu machen, dass der Schutzgegenstand unter einer CCPL steht. Ein darüber hinaus gehender Gebrauch der Marke "Creative Commons" oder einer verwandten Marke oder eines verwandten Logos bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung von Creative Commons. Jeder erlaubte Gebrauch richtet sich nach der Creative Commons Marken-Nutzungs-Richtlinie in der jeweils aktuellen Fassung, die von Zeit zu Zeit auf der Website veröffentlicht oder auf andere Weise auf Anfrage zugänglich gemacht wird. Zur Klarstellung: Die genannten Einschränkungen der Markennutzung sind nicht Bestandteil dieser Lizenz.

Creative Commons kann kontaktiert werden über <https://creativecommons.org/>.

Stichwörter

1 ist keine Primzahl	74	Distributivgesetze	26
ε -Umgebung einer reellen Zahl	29	Division	44
Äquivalenz	59, 64	Drei Rechenoperationen	136
Abstand	28, 99	Drei Schritte	67
Addition komplexer Zahlen	30	Effiziente Anwendung des Entwicklungssatzes	148
Addition von Matrizen	137	Effiziente Berechnung der Determinante	151
Additive Restklassengruppe	83	Effizientes Modulorechnen	78
Algorithmus der schnellen Exponentiation	90	Eigenschaften der Addition reeller Zahlen	26
Alternative Schreibweise der Implikation	58	Eigenschaften der Betragsfunktion	35
Anordnung von $\mathbb{R}$	26	Eigenschaften der Konjugation	36
Anordnungsoperator $\leq$	26	Eigenschaften des Betrags	29
Anschauungsraum	97	Eindeutigkeit	156
Antiparallele Vektoren	106	Einfache Berechnungsvorschrift	112, 117
Anwendung	131	Eingeschlossener Winkel	111
Anzahl der Vektoren einer Basis	122	Einheitsmatrix	131
Argument	39	Einleitung	128
Asymmetrische Kryptographie	92	Element	18
Aussage	49	Erzeugnis	107, 121
Aussage gilt für alle $n \geq N_1$	68	Eselsbrücke	118
Axiome der Arithmetik in $\mathbb{R}$	25	Euklidischer Algorithmus	76
Basis	108	Euler-Venn-Diagramme	22
Bedingte Aussage	58	Eulersche Formel	43
Beispiel	66	Eulersche Phi-Funktion	87
Berechnung der Inversen	156	Explizite Angabe der Elemente	18
Berechnung von $\varphi(n)$	88	Exponentialform	43
Beschreibung der Eigenschaften der Elemente	18	Ganze Zahlen	19
Betrachtung von Spezialfällen	142	Ganzzahlige Primzahlen	74
Betrag	28	Gaußsche Zahlenebene	30
Beweis	65	Gegenvektor	101
Beweisverfahren		Geometrische Interpretation	101, 103
direkter Beweis	65	Gleichheit	99
indirekter Beweis	65	Gleichheit	130
vollständige Induktion	67	Gleichheit von Mengen, echte Teilmenge	22
Bogenmaß	38	Größeroperator	27
Darstellungsformen	18	Häufige Fehler	111, 117
Das Produkt $z \cdot \bar{z}$	36	Hermiteische Matrix	135
Definition	128, 131	Hintergrund	92
Determinante		Historisches Beispiel	68
(2×2) -Matrix	143	Implikation	58
Determinante einer (1×1) -Matrix	142	Indizierung	128
Determinante einer (2×2) -Matrix	142	Induktionsanfang	67
Determinante einer (3×3) -Matrix	144	Induktionsschluss	68
Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix	145	Induktionsvoraussetzung	67
Determinanten spezieller Matrizen	149	Inklusion	22
Diagonalmatrix	133	Inklusives Oder	23
Die Menge $\mathbb{R}^x$	25	Inklusives ODER vs. XOR	51
Dimension	108	Intervall	
Dimension, Basis	108, 121	abgeschlossen, unbeschränkt	163
Direkter Beweis	65	Intervalle	27
Disjunkte Mengen	23	Intervalllänge	27
Disjunktion	51		

Inverse	155	Ordnung	21
Inverse einer (2×2) -Matrix	157	Teilmenge	22
Inverses		Vereinigung	23
additiv Inverses	26	Mengenoperationen	23
multiplikativ Inverses	163	Mengenoperationen auf Intervallen	28
Invertierbarkeit	155, 156	Modulooperator	78
kartesische Form	37	Modulorechnung	78
kartesisches Produkt	24	Multiplikation	44
Kartesisches Produkt	24	Multiplikation komplexer Zahlen	33
Kollinearität zweier Vektoren	118	Negation	63
komplexe Zahl		neutrales Element	26, 163
Betrag	34	Nullmatrix	131
Gaußsche Zahlenebene	30	Nullteiler	86
imaginäre Einheit	29	Nullvektor	98
Imaginärteil	29	Obere Dreiecksmatrix	134
kartesische Form	37	ODER in Programmiersprachen	51
Konjugation	35	Ordnung der Vereinigungsmenge	24
Realteil	29	Ordnung einer Menge	21
trigonometrische Form	38	Ordnung eines Gruppenelements	84
komplexe Zahlen	29	Orthogonale Vektoren	116
Komplexe Zahlen	21, 29	Orthogonalität	113
konjugiert komplexe Zahl	35	Parallele Vektoren	105
Konjugiert transponierte Matrix	132	Parallelogramm	115
Konjunktion	50	Polarform	38
Kontradiktion	55	Potenzen	84
Kontraposition	60	Potenzen der imaginären Einheit	32
Koordinaten	39, 98	Prädikat	62
Korrektheit	93	prime Restklassengruppe	87
Kreuzprodukt	115, 117	Primfaktorzerlegung	74
Kronecker-Delta-Symbol	131	Primzahl	74
Länge	99	Prinzip	65, 66
Laplacescher Entwicklungssatz	146	Priorität der Operatoren	52
Laufzeiteffizienz	91	Priorität von Operatoren und Bedingungen	60
Leere Menge	19	Private Key	92
Leitfragen	155	Proposition	52
Lineare Unabhängigkeit	109, 121	Public Key	92
Linearkombination	106, 121	Quantoren	62
Logische Äquivalenz	55	Rückblick auf $\mathbb{R}^3$	119
Mathematischer Satz	64	Rationale Zahlen	20
Matrix	128	Real- und Imaginärteil sind reell	29
regulär	156	Real-/Imaginärteil	29
singulär	156	Rechengesetze	116
Matrix als m Zeilenvektoren	129	Rechengesetze der Matrixaddition	137
Matrix als n Spaltenvektoren	128	Rechengesetze der Matrixmultiplikation	141
Matrixmultiplikation	139	Rechengesetze der Skalarmultiplikation	138
Mehrdeutigkeit	20	Rechenregeln für Propositionen	56
Menge	17, 18	Rechenregeln und Volumenfunktion	150
Differenz	23	Rechnen mit Restklassen	80
disjunkt	23	Rechter Winkel	38
Durchschnitt	23	Rechtshändiges Koordinatensystem	115
echte Teilmenge	22	Reelle Ebene	24
Komplement	23	reelle Zahlen	25
leere Menge	23	Reelle Zahlen	20
Obermenge	22		

Regel von Sarrus	144	Wahrheitsgehalt	49, 63
Richtung	104	Wahrheitstafel	50
RSA	92	Was ist eine Menge?	17
RSA als Signaturverfahren	94	Wichtige Kenngröße	142
Schiefsymmetrische Matrix	135	Wichtige Rechenregeln	149
Schreibweise	25	Wichtige Verallgemeinerung	144
Sicherheitsanforderungen	94	Wiederholung	155
Skalar	102	Wohlunterschieden, ungeordnet	18
Skalarmultiplikation	102, 119, 138	Zahl	
Skalarprodukt	110, 111	ganze Zahl	19
Spaltenvektor	98	reelle Zahl	20
Speichereffizienz	91	Zahlengerade	25
Spezialfälle	109, 111, 115	Zeilenvektor	97
Subtraktion	101	Zur Notation	22
Subtraktion komplexer Zahlen	31	Zusammengesetzte Aussagen	50
Symmetrische Matrix	135	Zwei charakteristische Eigenschaften	122
Tautologie	54		
Teilbarkeit	73		
Teilmenge	21		
trigonometrische Form	38		
Triviale Darstellung des Nullvektors	109		
Tupel sind geordnet	25		
Umrechnung kartesische Form in Polarform ..	39		
Umrechnung Polarform in Exponentialform ..	43		
Umrechnung Polarform in kartesische Form ..	39, 42		
UND in Programmiersprachen	50		
Unendlich ∞	28		
Ungleichungen	26		
Unlösbare Gleichungen über $\mathbb{Q}$	20		
Unlösbare Gleichungen über $\mathbb{R}$	21		
Unlösbare Gleichungen über $\mathbb{Z}$	19		
Unterdeterminanten	146		
Untere Dreiecksmatrix	134		
Untermatrix	145		
Variationen bedingter Aussagen	60		
Vektor	97		
Addition	100		
antiparallel	105, 106, 115		
Gleichheit	99		
Koordinaten	98		
Länge	99		
parallel	105		
Subtraktion	101		
Vektoraddition	100, 119		
Vektoren			
Erzeugnis	107		
kollinear	115		
Vektorprodukt = Kreuzprodukt	114		
Vektorraum	120		
Vektorraum K^n	121		
Veranschaulichung	25		
Veranschaulichung: Zeiger	31		
Vereinfachte Schreibweise	121		
Volumenfunktion	142		