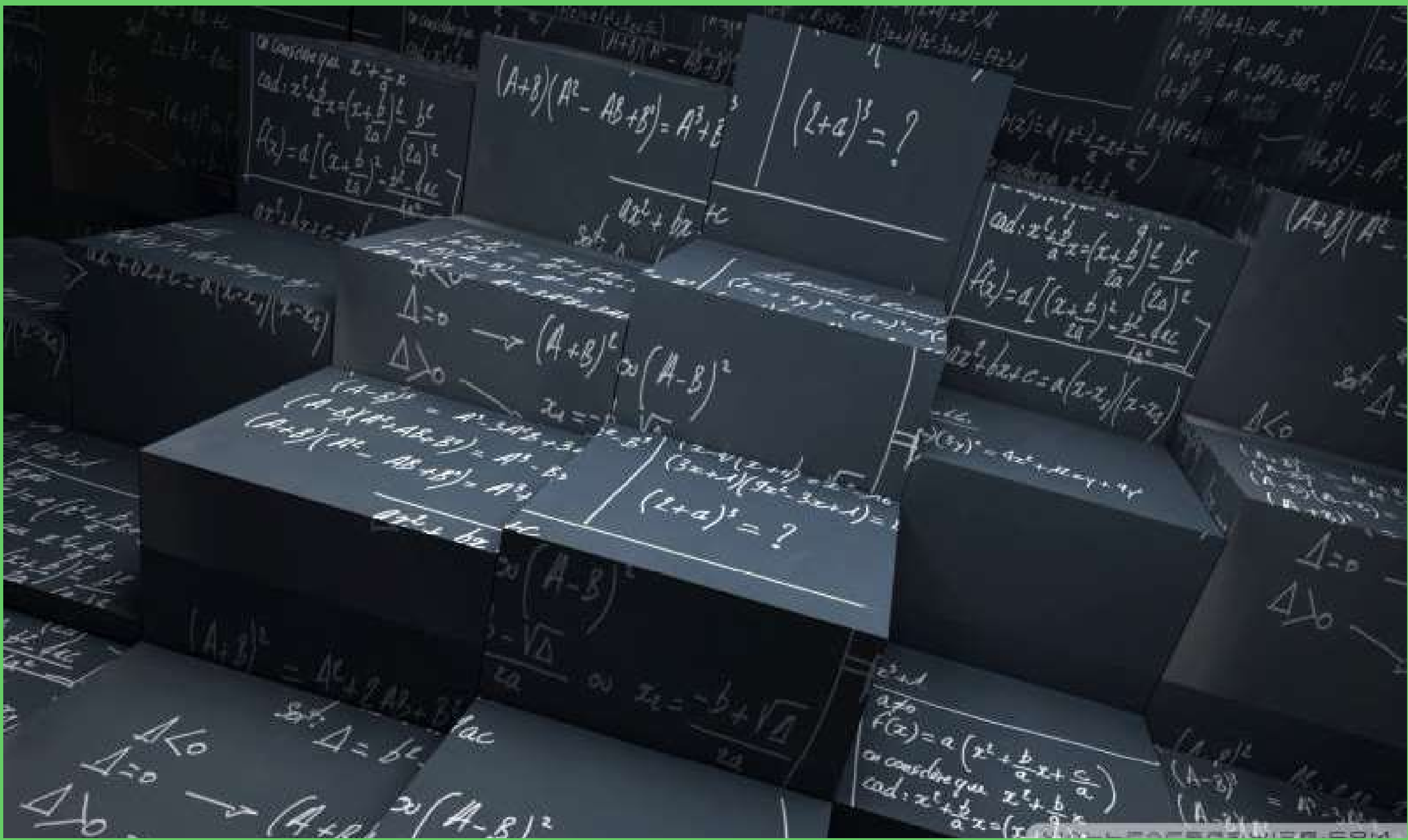
Forschungsinstitut Cyber Defence
Universität der Bundeswehr München

Open C3S
Open Competence Center for Cyber Security



Vorkurs Mathematik

Autoren:

Prof. Dr. Harald Baier

Prof. Dr. Jessica Steinberger

CODE FI

Modul 1
Vorkurs Mathematik

Autoren:
Prof. Dr. Harald Baier
Prof. Dr. Jessica Steinberger

6. Auflage

CODE FI

Universität der Bundeswehr München
Forschungsinstitut Cyber Defence
Carl-Wery-Straße 18
81739 München

6. Auflage (27. Juni 2024)

Um die Lesbarkeit zu vereinfachen, wird auf die zusätzliche Formulierung der weiblichen Form bei Personenbezeichnungen verzichtet. Wir weisen deshalb darauf hin, dass die Verwendung der männlichen Form explizit als geschlechtsunabhängig verstanden werden soll.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung zu den Studienbriefen

I. Abkürzungen der Randsymbole und Farbkodierungen

Axiom	A
Beispiel	B
Definition	D
Kontrollaufgabe	K
Merksatz	M
Satz	S
Übung	Ü

II. Zu den Autoren

Harald Baier promovierte 2002 an der TU Darmstadt über eine Arbeit zur effizienten Erzeugung elliptischer Kurven. Er war Mitarbeiter in einem Sicherheitsprojekt der Deutsche Bank AG und baute das Darmstädter Zentrum für IT-Sicherheit auf. Nach einer Professorentätigkeit an der FH Bingen (2004-2009) und an der Hochschule Darmstadt (2009-2020) ist er seit 01.09.2020 an der Universität der Bundeswehr München auf dem Gebiet der digitalen Forensik tätig. Schwerpunkte seiner Arbeit sind der Umgang mit großen Datenmengen in IT-forensischen Untersuchungen, Erzeugung synthetischer Datensätze für die Bewertung IT-forensischer Tools, Anti-Forensik sowie Hauptspeicherforensik.

Jessica Steinberger absolvierte eine Ausbildung zur Fachinformatikerin für Systemintegration und beendete diese im Jahr 2003. Anschließend begann sie ihr Studium an der Fachhochschule Bingen und schloss das Studium Bachelor of Science Informatik im Jahr 2009 ab. Darauf folgte das Studium Master-Studiengang Informationssysteme, welches sie im Jahr 2011 beendete. Von 2011 bis 2017 war sie Mitarbeiterin der Forschungsgruppe da/sec - Biometrics and Internet Security Research Group der Hochschule Darmstadt und promovierte 2018 an der UT Twente. Seit 2022 ist sie Professorin an der Hochschule Mannheim.

III. Modullehrziele

Die Studierenden kennen die grundlegenden Bausteine der Mathematik wie die Mengen der Zahlen, die Geometrie und die Funktionen. Sie kennen die grundlegenden Rechenregeln wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz und können diese anwenden. Die Studierenden sind in der Lage Bruchrechnungen (Erweitern, Kürzen, Addieren und Subtrahieren sowie Multiplizieren und Dividieren), Prozent- und Promillerechnung durchzuführen. Die Studierenden kennen unterschiedliche Teilbarkeitsregel und sind in der Lage diese aufzulisten und anzuwenden.

Neben den Themen der Bruchrechnung und der Finanzmathematik kennen die Studierende die Begrifflichkeiten der Terme und Gleichungen und können lineare Gleichungen und Gleichungssysteme zu lösen.

Die Studierenden sollen lineare Ungleichungen und lineare Ungleichungssysteme berechnen sowie deren Anwendung bei Optimierungsaufgaben kennen.

Die Studierenden kennen unterschiedliche geometrische Körper und Figuren, Winkel und Symmetrien.

Die Studierenden können unterschiedliche Flächen- und Volumeneinheiten auflisten und sind der Lage eine Einheit in eine andere Einheit zu transferieren. Darüber hinaus können sie die Fläche- und das Volumen von Objekten berechnen.

Die Studierenden können entscheiden, ob Zuordnungen proportional oder antiproportional sind und können Aufgaben mit dem dazugehörigen Dreisatz berechnen.

Die Studierenden kennen die unterschiedlichen Arten von Funktionen (ganzrationale Funktion, trigonometrische Funktion, Exponentialfunktion und Wurzelfunktion) und können die Begriffe Funktionen und Umkehrfunktion auseinanderhalten und erklären.

Die Studierenden kennen unterschiedliche Ableitungsfunktionen und können mit deren Hilfe die ersten Ableitungen elementarer Funktionen bilden. Weiterhin können die Studierende eine vollständige Funktionsuntersuchung durchführen und Extremwertaufgaben lösen. Die Studierenden kennen den Begriff der Funktionsscharen. Zu dem können Sie Wachstums- und Zerfallprozesse identifizieren und berechnen.

Modulbeschreibung

Modulbezeichnung:	Vorkurs
Verwendbarkeit:	Bachelorstudiengang Informatik/IT-Sicherheit (Vorbereitung auf den Bachelor IT-Sicherheit und ggfs. bei erfolgreichem Abschluss fachgebundener Hochschulzugang)
Lehrveranstaltungen und Lehrformen:	Mischung aus Präsenz- und Onlineveranstaltung
Modulverantwortliche(r):	Prof. Dr. Harald Baier
Lehrende:	Prof. Dr. Harald Baier
Dauer:	2.5 Monate
Credits:	Für Vorbereitungskurse werden keine Credits nach ECTS vergeben
Studien- und Prüfungsleistungen:	schriftliche Prüfung
Berechnung der Modulnote:	
Notwendige Voraussetzungen:	keine
Empfohlene Voraussetzungen:	keine
Unterrichts- und Prüfungssprache:	Deutsch
Zuordnung des Moduls zu den Fachgebieten des Curriculums:	
Einordnung ins Fachsemester:	
Arbeitsaufwand bzw. Gesamtworkload:	90 Zeitstunden
Lerninhalte:	• Arithmetik (Zahlen, grundlegende Rechenregeln, Bruchrechnung, Finanzmathematik) • Algebra und diskrete Mathematik (Teilbarkeiten, Mengen, Elementare Algebra) • Geometrie(Figuren und Winkel, Dreiecke und Vierecke, Kreis und Gerade, Flächen, Symmetrie, Kongruenzsätze, Strahlensätze, Körper) • Funktionen und ihre Darstellung (Zuordnungen, Definition von Funktionen, ganzrationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen und Wurzelfunktionen) • Differentialrechnung (Ableitungsfunktionen, vollständige Funktionsuntersuchung, Extremwertaufgaben, Funktionsscharen sowie Wachstums- und Zerfallprozesse).

Angestrebte Lernergebnisse:	*Fachkompetenz:* Die Studierenden kennen die grundlegenden Rechenregeln und können diese anwenden. Sie können Rechenregeln wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz anwenden und Brüche, Prozent- und Promilleaufgaben berechnen. Des Weiteren können die Studierenden lineare Gleichungen und Ungleichungen aufstellen und Gleichungssysteme berechnen. Die Studierenden haben die Kenntnisse der unterschiedlichen geometrischen Körper und Figuren, Winkel und Symmetrien. Sie sind in der Lage unterschiedliche Flächen- und Volumeneinheiten auflisten und eine Einheit in eine andere Einheit zu transferieren. Darüber hinaus können sie die Fläche- und das Volumen von Objekten berechnen. Darüber hinaus können Sie die unterschiedlichen Arten von Funktionen erläutern und haben Kenntnisse über ihre grundlegenden Eigenschaften. Zusätzlich sind die Studierenden in der Lage die Begrifflichkeiten aus der Differentialrechnung zu definieren und anzuwenden. *Methodenkompetenz:* Die Studierenden erwerben die Fähigkeit, mit den Lerninhalten des Moduls aktiv umgehen zu können und können Fragestellungen, Aufgaben und Probleme, die sich aus der Lehrveranstaltung ergeben, selbstständig bearbeiten und lösen. *Sozialkompetenz:* Die Studierenden können durch Gruppenarbeit an den Präsenzwochenenden Übungsaufgaben kooperativ lösen und in Teams arbeiten. Darüber hinaus besitzen sie die Fähigkeit, in komplexen Situationen zu handeln und Lösungen für die Aufgabenstellung zu entwickeln. *Selbstkompetenz:* Die Studierenden können aufgrund der Teamarbeit problemorientiert diskutieren. Sie haben die Fähigkeit, sich eine Meinung über die Themen zu bilden und können das erlangte Wissen im Bereich der Informatik einsetzen.
Häufigkeit des Angebots:	Sommersemester
Medienformen:	Studienbriefe inklusive Übungen in schriftlicher und elektronischer Form, Onlinematerial in Lernplattform, Online-Konferenzen, Präsenzveranstaltung mit Rechner und Beamer

Literatur:	• Lambacher-Schweizer, Ausgabe Bayern, Mathematik für Gymnasien, Klett Verlag, ISBN: 978-3-12-732760-1 • Lambacher-Schweizer, Ausgabe Bayern, Mathematik für Gymnasien, Klett Verlag, ISBN: 978-3-12-732860-8 • Gerald Teschl und Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik, Springer Verlag, ISBN: 978-3540280644 • Gerald Teschl und Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra, Springer Verlag, ISBN: 978-3540774310 • Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-1749-5 • Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-1227-8 • Lothar Papula, Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-0757-1

Mathematische Zeichen

Beziehungszeichen

$=$	gleich	$\approx$	ungefähr gleich
$\leq$	kleiner oder gleich	$<$	kleiner
$>$	größer	$\geq$	größer oder gleich
$\neq$	ungleich		

Konstanten

const	konstante Größe (Konstante)	π	Verhältnis des Kreisumfanges zu Kreisdurchmesser
e	Eulersche Zahl		

Logik

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	Aussagen	$\overline{\mathcal{A}}, \neg\mathcal{A}$	Negation der Aussage $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	Konjunktion, logisches UND	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	Disjunktion, logisches ODER
$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Implikation, WENN $\mathcal{A}$, DANN $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	Äquivalenz, $\mathcal{A}$ GENAU DANN, WENN $\mathcal{B}$

Mengen und Quantoren

A, B, C	Mengen	$\overline{A}$	Komplementmenge von A
$A \subset B$	A ist (echte) Teilmenge von B	$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \backslash B$	Differenzmenge	$A \times B$	Kartesisches Produkt
$x \in A$	x ist Element von A	$x \notin A$	x ist nicht Element von A
$A \cap B$	Durchschnitt zweier Mengen	$A \cup B$	Vereinigung zweier Mengen
$\emptyset$	leere Menge		
$\forall x$	für alle Elemente x	$\exists x$	es existiert ein Element x
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	$(a, b),]a, b[$	offenes Intervall
$(a, b],]a, b]$	linksoffenes Intervall	$[a, b), [a, b[$	rechtsoffenes Intervall

Algebra

$\vec{a}$	Vektor	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag, Länge des Vektors $\vec{a}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt	$\vec{0}$	Nullvektor
$\lambda\vec{a}$	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	Spatprodukt (gemischtes Produkt)
$\mathbf{A} = (a_{ij})$	Matrix $\mathbf{A}$ mit den Elementen a_{ij}	$\mathbf{A}^\mathbf{T}$	transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse Matrix zu $\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^*$	konjungiert transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante der quadratischen Matrix A	$\mathbf{E}_n$	$(n \times n)$-Einheitsmatrix

Zahlenmengen

$\emptyset$	leere Menge	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
i, j	imaginäre Einheit	$\mathrm{Re}(z)$	Realteil der Zahl z
$\mathrm{Im}(z)$	Imaginärteil der Zahl z	$\lvert z \rvert$	Betrag von z
z^*	konjugiert komplexe Zahl zu z		

Zahlentheorie

$a \mid b$	a teilt b	$a \nmid b$	a teilt b nicht
$a \equiv b \bmod n$	a ist kongruent zu b modulo n	p, q	Primzahlen
$\mathrm{ggT}(a, b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b	$\mathrm{kgV}(a, b)$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$(G, \circ)$	Gruppe G mit Verknüpfung $\circ$	$(\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der ganzen Zahlen bezüglich der Addition
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Restklassen modulo n	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der Restklassen modulo n bezüglich der Addition

Analysis

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$	a ist Grenzwert der Folge a_n
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$	b ist Grenzwert der Funktion $f(x)$, wenn x gegen x_0 strebt
$\sum\limits_{n=1}^{k}$	Summe mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\prod\limits_{n=1}^{k}$	Produkt mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0
$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$	erste, zweite, ..., n-te Ableitung der Funktion $f(x)$
$\int\limits_a^b f(x)dx$	bestimmtes Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b
$\int f(x)dx$	unbestimmtes Integral der Funktion f

Stochastik

Ω	Ergebnismenge
A	Ereignis des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (es gilt $A \subset \Omega$)
$\overline{A}$	Gegenereignis zu A (d.h. $\overline{A} = \Omega \setminus A$)
$\mathcal{P}(\Omega)$	Menge aller Ereignisse des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (formal ist das die Potenzmenge von Ω)
Pr	Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Ergebnismenge Ω
$\mathrm{Pr}(A \mid B)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
$\overline{x}$	Arithmetisches Mittel einer gegebenen Datenmenge
R	Spannweite einer gegebenen Datenmenge
Q	Quartil einer gegebenen Datenmenge
IQR	Interquartilsabstand einer gegebenen Datenmenge
σ_x^2	Varianz einer Stichprobe
σ_x	Standardabweichung einer Stichprobe
$H(X)$	Entropie einer diskreten Zufallsvariablen X

Strukturelemente der Mathematik

Während der Durcharbeitung der Studienbriefe werden Ihnen immer wieder unterschiedliche Elemente begegnen, um die Ergebnisse zu strukturieren und darzustellen. Hierzu verwenden Mathematiker Sätze, Beweise, Definitionen sowie Axiome. Nachfolgend werden wir nun die Bedeutung der einzelnen Elemente beschreiben.

(Mathematischer) Satz

Bei einem mathematischen Satz (oder auch Theorem genannt) handelt es sich um eine sehr wichtige wahre und bewiesene Aussage. Typischerweise lassen wir das Adjektiv 'mathematisch' weg und sprechen nur von einem *Satz*.

S

Satz 0.1: Der große Satz von Fermat

Wenn die natürliche Zahl $n > 2$ ist, hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine natürlichen Zahlen x, y und z als Lösungen.

Beweis

Bei einem Beweis handelt es sich um eine Begründung, warum eine Aussage (zum Beispiel eines mathematischen Satzes) wahr ist. Das bedeutet, dass sich jede Aussage eines Satzes beweisen lassen muss. In einem Beweis werden zunächst die Voraussetzungen festgehalten, anschließend wird eine Behauptung formuliert und der eigentliche Beweis begonnen. Das Ende eines Beweises ist entweder mit „qed" (quod erat demonstrandum) oder mit $\blacksquare$ gekennzeichnet.

Wir beweisen den nachfolgenden Satz wie folgt:

S

Satz 0.2

Es sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Beweis durch Induktion:

Da wir die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen müssen, setzen wir $N_1 = 1$.

- *Induktionsanfang:* Für $N_1 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{N_1} k = 1$ und $\frac{N_1\cdot(N_1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$. Also gilt die Behauptung des Satzes für $N_1 = 1$.
- *Induktionsvoraussetzung:* Es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
- *Induktionsschluss:* Es sei $n \geq 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^{n} k) + n + 1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1$. In der letzten Gleichung haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet. Es folgt $\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. Der Induktionsschluss ist also gelungen.

Das zeigt die Richtigkeit des Satzes. $\blacksquare$

Beweise in diesem Studienbrief sind der Vollständigkeit halber aufgeführt und behandeln optionalen weiterführenden Stoff für Interessierte. Wir raten Ihnen dennoch, sich diese Elemente anzuschauen und nachzuvollziehen.

Definition

Eine Definition ist eine mathematische Erklärung eines neuen Begriffes. Definitionen können weder wahr noch falsch sein. Definitionen sind wohldefiniert und führen nicht zu Widersprüchen.

Definition 0.1: Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion ist die Funktion, die jeder nicht negativen reellen Zahl x die nicht negative reelle Lösung y der Gleichung $x = y^2$ zuordnet.

D

Axiom

Axiome beschreiben mathematische Grundwahrheiten, für die es keinen Beweis gibt. Sie sind eine Art 'Grundwahrheiten' der Mathematik. Die Gesamtheit der Axiome heißt das *Axiomensystem*.

Axiom 0.1: Kleinstes Element einer nichtleeren Menge

Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

A

IV. Errata

Gegenüber der fünften Auflage sind folgende Korrekturen vorgenommen worden:

- In Kontrollaufgabe 2.17 a) war Gleichung III falsch dargestellt (als Gerade $y = x$ statt der Gerade $x = 0$).
- In Kontrollaufgabe 2.17 b) wurden die Linien dem Ungleichheitszeichen angepasst, d.h. auf Grund des jeweiligen $\geq$ bzw. $\leq$ wird jetzt eine durchgezogende Linie dargestellt.
- Kontrollaufgabe 2.18: In Teilaufgabe f) war die Klammer unklar gesetzt. Die Lösungen zu den Teilaufgaben g) und h) waren vertauscht.
- Kontrollaufgabe 2.20 d): In der Aufgabenstellung war nur ein Term gegeben, aber keine Gleichung. Der Term wurde entsprechend Null gesetzt. Die Lösung wurde vereinfacht.
- Kontrollaufgabe 2.7 c): Fehler in Resteglied korrigiert
- Darstellung der Grenzwerte in Kap. 5 angepasst

Studienbrief 1 Arithmetik

> Die Arithmetik ist die Grammatik der Zahlen.
> LUDWIG WITTGENSTEIN

1.1 Lernergebnisse

Nach dem Durcharbeiten dieses Studienbriefes kennen Sie die grundlegenden Regeln der Arithmetik. Sie haben die wichtisgten arithmetischen Gesetze, namentlich das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, verstanden und können diese anwenden. Zudem können Sie mit Brüchen und Dezimalbrüchen umgehen. Insbesondere sind Sie dazu in der Lage, einen Bruch in eine andere Darstellungsform zu überführen. Weiterhin können Sie mit Fakultäten sowie mit Summen- und Produktzeichen rechnen.

1.2 Zahlen

In der Mathematik wurden immer wieder neue Mengen definiert. Die wichtigsten Mengen werden in diesem Abschnitt beschrieben.

Natürliche Zahlen

Ausgangspunkt war die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

D

Definition 1.1: Natürliche Zahlen

Die Menge $\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5\}$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen. . Das Element 0 ist nicht in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten. Es gilt: $0 \notin \mathbb{N}$. Die Menge der natürlichen Zahlen inklusive dem Element 0 wird mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.

Es seien a und b natürliche Zahlen, also $a,b \in \mathbb{N}$. Dann besitzt nicht jede Gleichung der Form $a+x=b$ eine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

B

Beispiel 1.1: Mit der Menge der natürlichen Zahlen unlösbare Gleichung

Sei etwa $a=5$ und $b=3$, so ist die Gleichung $5+x=3$ mit einer Zahl $x \in \mathbb{N}$ nicht lösbar.

Ganze Zahlen

Um solche Gleichungen, wie $5+x=3$ lösen zu können, wurden die ganzen Zahlen eingeführt.

D

Definition 1.2: Ganze Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ heißt die Menge der ganzen Zahlen. In aufzählender Schreibweise gilt

$$\mathbb{Z} := \{0,-1,1,-2,2,-3,3,\ldots\} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}\,. \tag{1.1}$$

Sind $a,b \in \mathbb{Z}$, so kann jede Gleichung der Form $a+x=b$ mit $x \in \mathbb{Z}$ gelöst werden, denn es gilt $x=b-a$. Die Lösung x ist dann für gegebene $a,b \in \mathbb{Z}$ eindeutig. Jedoch die Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ist im Allgemeinen nicht mit einer ganzen Zahl x lösbar.

B

Beispiel 1.2: Mit der Menge der ganzen Zahlen unlösbare Gleichung

Die Gleichung $2 \cdot x = 1$ ist mit einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ nicht lösbar.

Rationale Zahlen

Die Mathematiker erweiterten daher die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu einer neuen Menge, die mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet wird. $\mathbb{Q}$ heißt die Menge der rationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen werden üblicherweise durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben.

D

Definition 1.3: Rationale Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.2}$$

heißt die Menge der rationalen Zahlen .

Die Definition $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ ist nicht zulässig, da eine Division durch 0 nicht zulässig ist.

In der Form von Gleichung (1.2) sind aber nicht alle Elemente unterschiedlich. Denn es gilt $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$. Für jede rationale Zahl gibt es also unendlich viele Darstellungen. Eine eindeutige Darstellung wird durch das Kürzen von gemeinsamen Faktoren in Zähler und Nenner erreicht, bis keine gemeinsamen Teiler größer als 1 existieren. Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Zähler und Nenner ist dann 1. Die abgekürzte Schreibweise hierfür lautet $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$, oder noch kürzer $(m,n) = 1$. Daher gilt

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m,n) = 1 \right\}. \tag{1.3}$$

In Gleichung (1.3) wird jede rationale Zahl eindeutig dargestellt.

In $\mathbb{Q}$ sind nun alle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ eindeutig lösbar. Es gilt $x = \frac{b}{a}$. Damit ist $\mathbb{Q}$ die kleinste unendliche Menge, in der wie gewohnt mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ gerechnet werden kann.

Neben $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gibt es noch weitere wichtige Mengen, denn eine Gleichung der Form $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{N}$ ist im Allgemeinen nicht mit einer rationalen Zahl x lösbar.

B

Beispiel 1.3: Mit der Menge der rationalen Zahlen unlösbare Gleichung

In der Literatur wird das Beispiel $a = 2$ häufig behandelt: Da die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ besitzt, folgt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere bekannte Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, sind die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e.

Reelle Zahlen

Die wichtige Menge, die alle rationalen Zahlen, alle Zahlen der Form $\sqrt{x}$ mit positivem $x \in \mathbb{Q}$ sowie Zahlen wie π und e enthält, ist die Menge der reellen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. An dieser Stelle kann weder durch eine explizite Angabe noch durch eine Beschreibung der Eigenschaften von reellen Zahlen die Menge $\mathbb{R}$ definiert werden. Auch dies ist ein Indiz, wie schwierig formale Mengenlehre ist. Allerdings haben die meisten Menschen eine konkrete Vorstellung davon, was eine reelle Zahl ist. Eine einfache Interpretation aller positiven reellen Zahlen sind Längen: Haben wir zwei verschiedene Punkte gegeben, so gibt es eine positive reelle Zahl, deren Wert gleich dem Abstand der beiden Punkte ist. Durch Hinzunahme der Null und der negativen reellen Zahlen erhält man so die Menge $\mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen

Aber auch in $\mathbb{R}$ sind nicht alle Gleichungen lösbar. Bereits die einfache Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine reelle Lösung. In der Mathematik wird eine Lösung dieser Gleichung mit i bezeichnet. Sie heißt die *imaginäre Einheit*, da i nicht in unserem Anschauungsraum liegt.

M

Merksatz 1.1

In der Elektrotechnik wird die Wechselstromstärke mit i bezeichnet. Aus diesem Grund wird die imaginäre Einheit in verschiedenen Literaturen auch mit dem Bezeichner j versehen.

D

Definition 1.4: Komplexe Zahlen

Die Menge

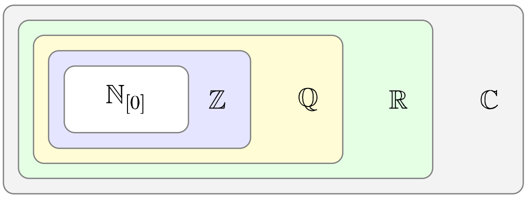
$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.4}$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen.

Eine wichtige Eigenschaft der komplexen Zahlen ist, dass jede Gleichung mit komplexen Koeffizienten in $\mathbb{C}$ lösbar ist. Mit der Menge $\mathbb{C}$ wurde zunächst das letzte Beispiel für eine Menge eingeführt.

Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Zahlenmengen gilt zusammenfassend:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



K

Kontrollaufgabe 1.1: Mengen der Zahlen

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

(a) $4 \in \mathbb{Q}$

(b) $0 \in \mathbb{N}$

(c) $-5 \in \mathbb{Z}$

(d) $0.3 \in \mathbb{Q}$

(e) $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Z}$

(f) $-3 \in \mathbb{Q}$

(g) $0.7 \in \mathbb{Q}$

(h) $0 \in \mathbb{N}_0$

(i) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

(j) $\pi \notin \mathbb{Q}$

(k) $e \in \mathbb{Z}$

(l) $-9 \notin \mathbb{N}$

K

Kontrollaufgabe 1.2: Mengen der Zahlen

Notieren Sie je zwei Zahlen, die zur folgenden Zahlenmengen gehören:

a) ... sie ist eine ganze Zahl und eine natürliche Zahl

b) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl, aber keine natürliche Zahl

c) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl

d) ... sie ist eine rationale Zahl und eine natürliche Zahl, aber keine echt gebrochene Zahl

e) ... sie ist eine natürliche Zahl und eine ganze Zahl mit einem Betrag kleiner als 7

1.3 Grundlegende Rechenregeln

In diesem Abschnitt lernen Sie die grundlegenden Regeln der Arithmetik kennen. Hierunter fallen das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz sowie das Distributivgesetz. Diese Rechenregeln werden innerhalb dieses Abschnitts für natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie reelle Zahlen $\mathbb{R}$ angewendet.

1.3.1 Kommutativgesetz

Kommutativgesetz

Das *Kommutativgesetz* findet bei Additionen und Multiplikationen seine Anwendung. Es besagt, dass die Summanden bei der Summenbildung bzw. die Faktoren bei der Produktbildung vertauscht werden können, ohne das Ergebnis der Rechenoperation zu beeinflussen. Es wird daher auch als Vertauschungsgesetz bezeichnet.

S

Satz 1.1: Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Für die Addition und Multiplikation zweier reeller Zahlen a und b (also $a, b \in \mathbb{R}$) gilt:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

B

Beispiel 1.4: Kommutativgesetz

- $2 + 3 = 3 + 2 = 5$
- $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$
- $-2 + 3 = 3 + (-2) = 1$
- $-2 \cdot 3 = 3 \cdot (-2) = -6$

1.3.2 Assoziativgesetz

Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* erlaubt es, bei Additionen und Mulitplikationen mit mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren beliebig Klammern zu setzen. Grundsätzlich werden bei Rechenoperationen die in Klammern gesetzten Terme bevorzugt bearbeitet. Da die Summen- und Produktbildung jedoch unabhängig davon ist, in welcher Reihenfolge die Summanden bzw. Faktoren addiert bzw. multipliziert werden, können Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Ergebnis zu beeinflussen. Das Setzen von Klammern verbindet einzelne Summanden bzw. Faktoren zu einem Teilterm der Rechenoperation, der bevorzugt bearbeitet wird. Daher wird dieses arithmetische Gesetz auch als *Verbindungsgesetz* bezeichnet.

S

Satz 1.2: Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

Für die Addition und Multiplikation von drei reellen Zahlen (also $a, b, c \in \mathbb{R}$) gilt:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

B

Beispiel 1.5: Assoziativgesetz

- $3+(2+5)=3+(7)=10$ ist identisch zu $(3+2)+5=(5)+5=10$
- $3\cdot(2\cdot5)=3\cdot(10)=30$ ist identisch zu $(3\cdot2)\cdot5=(6)\cdot5=30$

Bitte beachten Sie, dass beim Assioziativgesetz **nicht** die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren geändert wird, sondern lediglich die Reihenfolge deren arithmetischer Bearbeitung (also von links nach rechts bzw. von rechts nach links).

1.3.3 Distributivgesetz

Distributivgesetz

Das Distributivgesetz legt fest, wie mit der Multiplikation von Summen umzugehen ist. Dabei spielt das Auflösen der Summenklammer eine essenzielle Rolle. Grundsätzlich besagt dass Distributivgesetz, dass anstatt einer Summe auch dessen einzelne Summanden mit einem Faktor multipliziert werden können. Da beim Auflösen der Summenklammer der multiplizierende Faktor auf beide Summanden verteilt wird, wird diese Rechenregel auch als Verteilungsgesetz bezeichnet.

S

Satz 1.3: Distributivgesetz

Für die drei Zahlen a, b und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

B

Beispiel 1.6: Distributivgesetz

$$\begin{aligned}2\cdot(3+5)&=2\cdot3+2\cdot5\\2\cdot(8)&=(6)+(10)\\16&=16\end{aligned}$$

Auflösen von Klammern

Steht ein $+$ vor der Klammer, bleiben beim Auflösen der Klammer die Vorzeichen innerhalb der Klammer unverändert.
$25+(-15+10)=25+(-5)\Rightarrow25-15+10=25-5\Rightarrow20=20$
Steht ein $-$ vor der Klammer, werden beim Auflösen der Klammer die Vorzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt.
$28-(-16+4)=28-(-12)\Rightarrow28+16-4=28+12\Rightarrow40=40$

Vereinfachte Schreibweise verschiedener Vorzeichen bei Mulitplikation

$(+2)\cdot(+3)=+6$
$(+2)\cdot(-3)=-6$
$(-2)\cdot(+3)=-6$
$(-2)\cdot(-3)=+6$

K

Kontrollaufgabe 1.3: Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz

Setzen Sie Klammern und wenden Sie wenn nötig das Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz an, so dass die Rechnung einfach durchzuführen ist.

(a) $556+732-244+378+268$
(b) $82-429+218+529$
(c) $273+658+327+442+105$
(d) $44+943+103+558+257$
(e) $14\,645+368-345$
(f) $45\cdot(1542+468)$

1.4 Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

Ein Bruch besteht aus einem Zähler und einem Nenner, die durch einen Bruchstrich voneiander getrennt sind. Der grundsätzliche Aufbau eines Bruches ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Man unterscheidet zwischen echten, unechten und gemischten Brüchen.

echter Bruch

Ein echter Bruch zeichnet sich dadurch aus, dass der Zähler kleiner als der Nenner ist. Er gibt den Bruchteil eines Ganzen an, weshalb sein Dezimalwert stets kleiner 1 ist.

Beispiel: $\frac{1}{8}=0,125$

unechter Bruch

Bei einem unechten Bruch hingegen ist der Zähler größer als der Nenner. Dementsprechend ist der Dezimalwert eines unechten Bruchs stets größer 1.

Beispiel: $\frac{17}{8}=2,125$

gemischter Bruch

Ein gemischter Bruch ist eine besondere Darstellungsform des unechten Bruchs. Der unechte Bruch wird dabei in eine ganze Zahl und einen echten Bruch aufgeteilt.

Beispiel: $\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

Unechte und gemischte Brüche lassen sich ineinander überführen. Die Umwandlung eines unechten Bruchs in einen gemischten Bruch erfolgt durch eine ganzzahlige Division mit Rest. Der Rest wird dabei als echter Bruch dargestellt. Umgekehrt erfolgt die Umrechnung eines gemischten in einen unechten Bruch über die folgende Formel:

$$\frac{\text{Ganze Zahl} \cdot \text{Nenner} + \text{Zähler}}{\text{Nenner}} \tag{1.5}$$

B

Beispiel 1.7: Umwandeln unechter und gemischter Brüche

unechter Bruch $\Rightarrow$ gemischter Bruch:

$$\frac{17}{8} = \frac{16}{8} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{8} = 2\frac{1}{8} \qquad \text{ganzzahlige Divsion mit Rest}$$

gemischter Bruch $\Rightarrow$ unechter Bruch:

$$2\frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 1}{8} = \frac{16+1}{8} = \frac{17}{8} \qquad \text{Anwendung von Formel (1.1)}$$

K

Kontrollaufgabe 1.4: Unechten und gemischten Brüche

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

a) $\frac{32}{16}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{13}{7}$

d) $2\frac{2}{9}$

e) $3\frac{2}{5}$

f) $7\frac{2}{11}$

1.4.1 Erweitern eines Bruches

S

Satz 1.4: Erweitern eines Bruches

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit der Zahl n erweitert, indem sowohl Zähler als auch Nenner mit der Zahl n multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \tag{1.6}$$

wobei $n \neq 0$ gilt.

B

Beispiel 1.8: Erweitern eines Bruches

Beide nachfolgenden Brüche werden mit der Zahl 5 erweitert

- $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$
- $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

1.4.2 Kürzen eines Bruches

S

Satz 1.5: Kürzen eines Bruches

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit reellen Zahlen a, b wird mit der Zahl $n \in \mathbb{R}, n \neq 0$ gekürzt, indem der Zähler und Nenner durch die Zahl n dividiert wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n} \tag{1.7}$$

B

Beispiel 1.9: Kürzen eines Bruches

Beide nachfolgenden Brüche werden mit der Zahl 2 gekürzt

- $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{12} = \frac{2:2}{12:2} = \frac{1}{6}$

1.4.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

S

Satz 1.6: Addition und Subtraktion von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ addiert oder subtrahiert, indem die Nenner beider Brüche durch Kürzen oder Erweitern gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \tag{1.8}$$

wobei $b \cdot d \neq 0$ gilt.

B

Beispiel 1.10: Addition und Subtraktion von Brüchen

- $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$
- $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

K

Kontrollaufgabe 1.5: Addition und Subtraktion von Brüchen

Addieren oder Subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie das Endergebnis, wenn möglich.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{12} + \frac{7}{9}$

c) $\frac{4}{15} + \frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{11} - \frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{11}{36}$

f) $\frac{1}{8} - \frac{4}{20}$

1.4.4 Multiplikation von Brüchen

Satz 1.7: Multiplikation von Brüchen

S

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit dem Buch $\frac{c}{d}$ multipliziert, indem jeweils die Zähler und Nenner beider Brüche miteinander multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.9}$$

Beispiel 1.11: Multiplikation von Brüchen

B

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

Kontrollaufgabe 1.6: Multiplikation von Brüchen

K

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie das Endergebnis, wenn möglich.

$a)$ $\frac{1}{3} \cdot 9$

$b)$ $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{14}$

$c)$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}$

1.4.5 Kehrwertbildung

Der Kehrwert eines Bruches wird für die Division von Brüchen benötigt. Er ergibt sich, indem Zähler und Nenner eines Bruches miteinander vertauscht werden. Der Kehrwert ist demnach wie folgt definiert: Kehrwert

Definition 1.5: Kehrwert

D

Der Kehrwert eines Bruches $\frac{a}{b}$ ergibt sich durch Vertauschen von Zähler und Nenner zu $\frac{b}{a}$. Jede ganze Zahl c lässt sich ebenfalls als Bruch der Form $\frac{c}{1}$ darstellen. Mit Ausnahme von Null ergbit sich daher der Kehrwert jeder ganzen Zahl c allgemein zu $\frac{1}{c}$.

Beispiel 1.12: Kehrwert

B

- Der Kehrwert von $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ lautet $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$
- Der Kehrwert von $c = 5 = \frac{c}{1} = \frac{5}{1}$ lautet $\frac{1}{c} = \frac{1}{5}$

1.4.6 Division von Brüchen (Doppelbruch)

S

Satz 1.8: Division von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch den Bruch $\frac{c}{d}$ dividiert, indem er mit dessen Kehrwert multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{1.10}$$

B

Beispiel 1.13: Division von Brüchen

- $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$
- $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

K

Kontrollaufgabe 1.7: Division von Brüchen

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$a)$ $\frac{3}{10} : 9$

$b)$ $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

$c)$ $\frac{1}{8} : \frac{4}{20}$

1.5 Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Summenzeichen
Produktzeichen

Zur Berechnung von Summen und Produkten beliebig vieler Summanden bzw. Faktoren können das Summenzeichen Σ und das Produktzeichen $\prod$ verwendet werden.

1.5.1 Summenzeichen

S

Satz 1.9: Summenzeichen

Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so wird die Summe der Zahlen $a_k, \ldots, a_n$ mit

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + \ldots + a_n$$

bezeichnet. Der Index i heißt Summationsindex.

Funktion des Summationsindex

Der Summationsindex i kann bei der Summenbildung sowohl als Index der Summanden als auch als Summand selber fungieren:

- i im Index der Summanden $\Rightarrow$ $\sum_{i=k}^{n} a_i$

- i als Summand selber $\Rightarrow$ $\sum_{i=k}^{n} i$

Im ersten Fall müssen die Summanden a_i explizit definiert sein, um den Wert der Summe berechnen zu können. Im zweiten Fall hingegen entsprechen die Summanden den Werten des Summationsindex i. Der Summenwert ist daher unmittelbar berechenbar. Der Unterschied soll durch die folgenden Beispiele verdeutlicht werden:

- $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6$

Beispiel 1.14: Summenzeichen

In folgender Tabelle seien den Indizes $i = 1, 2, .., 6$ verschiedene Werte $a_i = a_1, a_2, .., a_6$ zugeordnet:

i	1	2	3	4	5	6
a_i	2	4	3	2	3	7

Gefragt sei die Summe der Tabellenwerte, denen die Indizes von $i = 2$ bis $i = 5$ zugeordnet sind. Die Summationsgrenzen reichen demnach von $k = 2$ bis $n = 5$. Die gefragte Summe lässt sich somit wie folgt berechnen:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=2}^{5} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

B

Kontrollaufgabe 1.8: Summenzeichen

Berechnen Sie die Summe aller Werte der Tabelle aus Beispiel 1.11.

K

Spezialfälle

Ist die untere Summationsgrenze gleich der oberen, so besteht die Summe nur aus einem Summanden.

Satz 1.10: Spezialfälle bei Summenzeichen

Seien $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $i = k$, dann ist

$$\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$$

S

Ist hingegen die untere Summationsgrenze größer als die obere, so beträgt das Ergebnis der Summe 0. Diese Summe heißt leere Summe.

S

Satz 1.11: Spezialfälle bei Summenzeichen

Seien $i,k \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$, dann ist

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = 0.$$

Rechenregeln

S

Satz 1.12: Konstanter Wert von Summen

Wird über einen konstanten Wert c aufsummiert, der unabhängig vom Summationsindex i ist, so gilt:

$$\sum_{i=k}^{n} c = (n-k+1)\cdot c$$

B

Beispiel 1.15: Konstanter Wert von Summen

Gefragt sei der Wert der Summe $\sum\limits_{i=3}^{6} 4$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{n} c &= (n-k+1)\cdot c \\ \sum_{i=3}^{6} 4 &= (6-3+1)\cdot 4 \\ 4+4+4+4 &= 4\cdot 4 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

K

Kontrollaufgabe 1.9: Rechenregeln bei Summen

Schreiben Sie den Wert der Summe

$$\sum_{i=-10}^{-8} \lambda$$

aus.

S

Satz 1.13: Konstanter Faktor in Summen

Sei c ein konstanter Faktor innerhalb der Summe $\sum_{i=k}^{n} c \cdot a_i$ und unabhängig vom Summationsindex i, so lässt sich der Faktor vor das Summenzeichen ziehen:

$$\sum_{i=k}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=k}^{n} a_i$$

B

Beispiel 1.16: Konstanter Faktor in Summen

Gefragt sei der Wert der Summe $\sum_{i=-4}^{-1} 4i$.

$$\sum_{i=-4}^{-1} 4i = 4 \sum_{i=-4}^{-1} i$$

$$4 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = 4 \cdot (-4 + (-3) + (-2) + (-1))$$

$$-16 + (-12) + (-8) + (-4) = 4 \cdot (-10)$$

$$-40 = -40$$

Wie aus den Rechenregeln für die Addition und Subtraktion bekannt, sind für Summen alle üblichen Rechenregeln erlaubt. So können zwei Summen zu einer zusammengefasst werden, wenn die oberen und unteren Grenzen beider Summationen übereinstimmen.

S

Satz 1.14: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)$$

B

Beispiel 1.17: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge

Wir berechnen den Wert der Summe $\sum_{i=7}^{9} \frac{i}{2} + \sum_{i=7}^{9} \frac{i}{4}$ wie folgt:

$$\sum_{i=7}^{9} \frac{i}{2} + \sum_{i=7}^{9} \frac{i}{4} = \sum_{i=7}^{9} (\frac{i}{2} + \frac{i}{4})$$

$$\left(\frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{7}{4} + \frac{8}{4} + \frac{9}{4}\right) = \left((\frac{7}{2} + \frac{7}{4}) + (\frac{8}{2} + \frac{8}{4}) + (\frac{9}{2} + \frac{9}{4})\right)$$

$$18 = 18$$

Weiterhin können einzelne Summanden von der Summe abgespalten werden. Dafür ist jedoch eine Anpassung der Summationsgrenzen erforderlich.

S

Satz 1.15: Abspalten einzelner Summanden

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n-2} a_i \quad + a_{n-1} + a_n$$

B

Beispiel 1.18: Abspalten einzelner Summanden

Gefragt sei die Summe aller Werte a_i aus der folgenden Tabelle:

i	1	2	3	4	5
a_i	2	1	3	4	1

Dabei lassen sich beispielhaft der erste $(i = 1)$ und der letzte Summand $(i = 5)$ wie folgt von der Summe abspalten:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + a_4} + a_5 = 2 + 1 + 3 + 4 + 1 = 11$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{4} a_i + a_5 = 2 + (1 + 3 + 4) + 1 = 11$$

Bei der Anwendung der vorgestellten Regeln zum Rechnen mit Summenzeichen unterlaufen häufig Fehler, die zu falschen Zwischen- oder Endergebnissen führen können. Im Folgenden sind häufig angewandte Umformungen aufgelistet, die unzulässig sind und die es somit zu vermeiden gilt.

Unzulässige Umformungen In Verbindung mit Summenzeichen

- $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$ für $n > 1$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} (a_i - c) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i - c$

1.5.2 Produktzeichen

S

Satz 1.16: Produktzeichen

Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so wird das Produkt der Zahlen $a_k, \ldots, a_n$ mit

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot \ldots \cdot a_n.$$

bezeichnet. Der Index i heißt Multiplikationsindex.

B

Beispiel 1.19: Produktzeichen

- $\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
- $\prod_{i=4}^{6} i^2 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$

K

Kontrollaufgabe 1.10: Produktzeichen

Berechnen Sie Summe von $\prod_{i=5}^{8} i$

Spezialfälle

Ist die untere Multiplikationsgrenze größer als die obere, so beträgt das Ergebnis des Produkts 1.

S

Satz 1.17: Spezialfall bei Produktzeichen

Seien $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$, dann ist

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = 1.$$

1.5.3 Indexverschiebung

Die Grenzen von Summen können geändert werden, indem der ursprüngliche Summationsindex *substituiert* wird. Bei einer Indexverschiebung wird eine ganze Zahl zum Summenindex addiert oder subtrahiert um die weitere Rechnung mit den Summen oder Produkten zu vereinfachen.

Indexverschiebung

S

Satz 1.18: Indexverschiebung

$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{a-a} + a_{1+a-a} + \ldots + a_{n+a-a} = \sum_{j=a}^{n+a} a_{j-a}$ für $a \in \mathbb{Z}$

Vorgehensweise der Indexverschiebung

1. Festlegung der Schritte um wieviele der Index verschoben werden soll
2. Durchführung Indexverschiebung mit $\pm$-Anzahl der Schritte (Index nach links: Ersetze jede Laufvariable durch $+$; Index nach rechts: Ersetze jede Laufvariable durch $-$)
3. Fasse Summe zusammen

B

Beispiel 1.20: Indexverschiebung

Wir verschieben den Index der $\sum_{i=3}^{5} \frac{4i+2}{2}$ von $i = 3$ auf $i = 1$ wie folgt:

Um den Index von $i = 3$ auf $i = 1$ zu verschieben, sind 2 Schritte nötig Demnach wird die Laufvariable i durch $i + 2$ ersetzt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{i=5} \frac{4i+2}{2} &= \sum_{(i+2)=3}^{(i+2)=5} \frac{4(i+2)+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{4(i+2)+2}{2}\end{aligned}$$

Im letzten Schritt fassen wir die Summe zusammen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{i=5} \frac{4i+2}{2} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{4(i+2)+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{4i+8+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{4i+10}{2}\end{aligned}$$

K

Kontrollaufgabe 1.11: Indexverschiebung

Verschieben Sie den Index der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ auf $k = 5$.

1.6 Rechnen mit Fakultäten

Fakultät

In der Analysis, der Kombinatorik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der Statistik wird häufig mit Fakultäten gerechnet. Es handelt sich hierbei um ein spezielles Produkt der Form:

D

Definition 1.6: Fakultät

Die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ heißt $n-$Fakultät. Es gilt $0! := 1$.

S

Satz 1.19: Berechnung der Fakultät

Die Berechnung erfolgt mithilfe des Produktzeichens. Es gilt:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Es gilt $(n+1)! = n!(n+1)$ für $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

B

Beispiel 1.21: Berechnung der Fakultät

Wir berechnen den Wert von 5!:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

B

Beispiel 1.22: Kürzen der Fakultät

Kürzen Sie den Ausdruck $\frac{(n+2)!}{n! \cdot (n+2)}$

Der Ausdruck $(n+2)!$ kann gemäß der Definition 1.6 wie folgt umgeschrieben werden: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!}{n!\cdot(n+2)} &= \frac{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n!\cdot(n+2)}\\ &= n+1\end{aligned}$$

Kontrollaufgabe 1.12: Fakultät

Berechnen Sie den Wert $\frac{4!}{6!}$.

K

1.7 Übungsaufgaben

Ü

Übung 1.1: Unechte und gemischte Brüche

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

a) $\frac{15}{4}$

b) $\frac{9}{2}$

c) $6\frac{1}{8}$

d) $5\frac{3}{4}$

e) $\frac{11}{2}$

f) $\frac{2}{3}$

Ü

Übung 1.2: Addition und Subtraktion von Brüchen

Addieren oder subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{2}{9} + \frac{7}{5}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{11} + \frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

f) $\frac{23}{27} - \frac{2}{23}$

Ü

Übung 1.3: Multiplikation von Brüchen

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{3}{11} \cdot \frac{12}{33}$

b) $\frac{2}{5} \cdot 3$

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{7}$

Ü

Übung 1.4: Division von Brüchen

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{3}{8} : \frac{6}{12}$

b) $\frac{3}{5} : \frac{4}{10}$

c) $\frac{7}{21} : \frac{1}{3}$

Ü

Übung 1.5: Arithmetik

Berechnen Sie den jeweiligen Wert des Terms:

a) $-(2-(3+4-(5-(2+3))))$

b) $2\cdot(3+4)-1\cdot(4\cdot(3+2)+3\cdot(4-2))$

c) $1\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{20} \cdot 2\frac{1}{2}\right)$

$d)$ $\frac{\frac{2}{4}}{8}$

Übung 1.6: Summenzeichen

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{i=2}^{4}(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1})$

Ü

Übung 1.7: Summen- und Produktzeichen

Berechnen Sie $A = \prod_{i=2}^{3} a_i - \sum_{i=1}^{3} a_i$, wenn $a_1 = 2, a_2 = 3$ und $a_3 = 5$ gilt.

Ü

Übung 1.8: Indexverschiebung

Führen Sie eine geeignete Indexverschiebung durch und berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{v=2}^{23}(v-1)^2 + \sum_{\mu=-2}^{19} 2(\mu+3) + \sum_{k=10}^{31} 1$.
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Ü

Übung 1.9: Fakultät

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{(n-1)!\cdot n^2}{n!}$.

Ü

Liste der Lösungen zu den Kontrollaufgaben

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.1 auf Seite 22

Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

(a) $4 \in \mathbb{Q}$ ist wahr

(b) $0 \in \mathbb{N}$ ist falsch

(c) $-5 \in \mathbb{Z}$ ist wahr

(d) $0.3 \in \mathbb{Q}$ ist wahr

(e) $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Z}$ ist falsch

(f) $-3 \in \mathbb{Q}$ ist wahr

(g) $0.7 \in \mathbb{Q}$ ist wahr

(h) $0 \in \mathbb{N}_0$ ist wahr

(i) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ist falsch

(j) $\pi \notin \mathbb{Q}$ ist wahr

(k) $e \in \mathbb{Z}$ ist falsch

(l) $-9 \notin \mathbb{N}$ ist wahr

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.2 auf Seite 23

Notieren Sie je zwei Zahlen, die zur folgenden Zahlenmengen gehören:

a) ... sie ist eine ganze Zahl und eine natürliche Zahl: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

b) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl, aber keine natürliche Zahl: $-1, -2, -3, \ldots$

c) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

d) ... sie ist eine rationale Zahl und eine natürliche Zahl, aber keine echt gebrochene Zahl: Es gibt keine Zahlen, die diese Bedingung erfüllen.

e) ... sie ist eine natürliche Zahl und eine ganze Zahl mit einem Betrag kleiner als 7: $1, 2, 3, 4, 5, 6$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.3 auf Seite 26

Setzen Sie Klammern und wenden Sie wenn nötig das Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz an, so dass die Rechnung einfach durchzuführen ist.

a) $556 + 732 - 244 + 378 + 268 = (732 + 378) + ((556 - 244) + 268) = 1110 + (312 + 268) = 1110 + 580 = 1690$

b) $82 - 429 + 218 + 529 = (82 + 218) + (529 - 429) = 300 + 100 = 400$

c) $273 + 658 + 327 + 442 + 105 = (273 + 327) + (658 + 442) + 105 = 600 + 1100 + 105 = 1805$

d) $44 + 943 + 103 + 558 + 257 = (943 + 257) + (44 + 103) + 558 = 1200 + 147 + 558 = 1905$

e) $14645 + 368 - 345 = (14645 - 345) + 368 = 14300 + 368 = 14668$

f) $45 \cdot (1542 + 468) = 45 \cdot (2010) = 90450$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.4 auf Seite 27

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

$a)\ \frac{32}{16} = 2$

$b)\ \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

$c)\ \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$

$d)\ 2\frac{2}{9} = \frac{20}{9}$

$e)\ 3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

$f)\ 7\frac{2}{11} = \frac{79}{11}$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.5 auf Seite 28

Addieren oder Subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$b)\ \frac{1}{12} + \frac{7}{9} = \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{3}{36} + \frac{28}{36} = \frac{31}{36}$

$c)\ \frac{4}{15} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15} + \frac{10}{15} = \frac{14}{15}$

$d)\ \frac{2}{11} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{11 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{6}{33} - \frac{11}{33} = -\frac{5}{33}$

$e)\ \frac{1}{2} - \frac{11}{36} = \frac{1 \cdot 18}{2 \cdot 18} - \frac{11}{36} = \frac{18}{36} - \frac{11}{36} = \frac{7}{36}$

$f)\ \frac{1}{8} - \frac{4}{20} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{5}{40} - \frac{8}{40} = -\frac{3}{40}$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.6 auf Seite 29

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$a)\ \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{1} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 1} = \frac{9}{3} = 3$

$b)\ \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{14} = \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 1}{8 \cdot 2} = \frac{7}{16}$

$c)\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 9} = \frac{2}{27}$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.7 auf Seite 30

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$a)\ \frac{3}{10} : 9 = \frac{3}{10} : \frac{9}{1} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{10 \cdot 3} = \frac{1}{30}$

$b)\ \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$

$c)\ \frac{1}{8} : \frac{4}{20} = \frac{1}{8} \cdot \frac{20}{4} = \frac{1 \cdot 20}{8 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 1} = \frac{5}{8}$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.8 auf Seite 31

Berechnen Sie Summe aller Werte der Tabelle aus Beispiel 1.11:

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = 2+4+3+2+3+7 = 21$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.9 auf Seite 32

Schreiben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=-10}^{-8} \lambda$ aus.

$$\sum_{i=-10}^{-8} \lambda = \lambda + \lambda + \lambda$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.10 auf Seite 35

Berechnen Sie Summe von $\prod_{i=5}^{8} i$:

$$\prod_{i=5}^{8} i = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.11 auf Seite 36

Verschieben Sie den Index der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ auf $k = 5$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=5}^{n+4} a_{k-4}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.12 auf Seite 37

Berechnen Sie den Wert $\frac{4!}{6!}$.

$$\begin{aligned}\frac{4!}{6!} &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{6 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{30}\end{aligned}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 2.1 auf Seite 43

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

a) $3 \nmid 7$ ist wahr

b) $198|22$ ist falsch

c) $266 \nmid 19$ ist wahr

Verzeichnisse

I. Abbildungen

II. Beispiele

III. Definitionen

IV. Kontrollaufgaben

V. Sätze

VI. Tabellen

VII. Literatur

[1] Ilja N. Bronstein und Konstantin A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 7 edition, 2008. ISBN 978-3-8171-2017-8.

[2] Christoph Busch. 3d face recogniton, 2011.

[3] Das Bundesministerium des Innern. Der neue Personalausweis. `http://www.personalausweisportal.de/SharedDocs/Bilder/DE/Ausweis_stehend.jpg?__blob=poster&v=6`, 2011.

[4] Das Cryptool Team. Asymmetrische Kryptologie am Beispiel RSA entdecken. `https://www.cryptoportal.org/data/Asymmetrische%20Kryptologie%20am%20Beispiel%20RSA%20entdecken_v1.1.pdf`, January 2010.

[5] Heinz Griesel, Andreas Gundlach, Helmut Postel, und Friedrich Suhr. *Elemente der Mathematik - EdM*. Schroedel, Braunschweig, 1 edition, 2011. ISBN 978-3-507-87954-6.

[6] Dawn Griffiths. *Statistik von Kopf bis Fuss: Ein Buch zum Mitmachen und Verstehen*. O'Reilly, Beijing and and Cambridge and Köln and Sebastopol and Taipei and Tokyo, 2009. ISBN 978-3-89721-891-8.

[7] Günter Grundmann. Biometrische verfahren im prüfungslabor. `http://www.tuer-tor-report.com/uploads/images/14_01_d_TTF_1_07.jpg`, 2007.

[8] Hammer, Prokop, Voit, und Quaritsch. Latex@tug. `http://latex.tugraz.at`.

[9] Günter Hanisch, Hans-Christian Reichel, Robert Müller, und Sonja Schak. *Mathematik für HLA 1*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH & Co KG, Wien, 2006. ISBN 978-3-230-02652-1.

[10] Rainer Maroska, Achim Olpp, Claus Stöckle, und Hartmut Wellstein. *Schnittpunkt Mathematik Rheinland-Pfalz*. Klett-Verlag, 2004. ISBN 978-3-12-741760-9.

[11] Rainer Maroska, Achim Olpp, Rainer Pongs, Claus Stöckle, Hartmut Wellstein, und Heiko Wontroba. *Schnittpunkt - Mathematik für Realschulen*. Klett, Stuttgart and Leipzig, 1. auflage edition, 2010. ISBN 978-3-12-742601-4.

[12] Lothar Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Mit zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel*. Vieweg, Wiesbaden, 9 edition, 2006. ISBN 978-3-8348-0156-2.

[13] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 13 edition, 2011. ISBN 978-3-8348-1749-5.

[14] August Schmid und Wilhelm Schweizer. *Analysis: Grundkurs ; Gesamtausg*. Klett Schulbuchverl, Stuttgart, 1 edition, 1990. ISBN 3-12-739640-6.

[15] Bruce Schneier. *Angewandte Kryptographie - Der Klassiker: Protokolle, Algorithmen und Sourcecode in C*. Pearson Addison Wesley, Chichester, 2006. ISBN 0471117099.

[16] Symantec Corporation. Symantec intelligence report: January 2012. `http://www.symanteccloud.com/de/de/mlireport/SYMCINT_2012_01_January_FINAL_DE.pdf`, 2011.

[17] Symantec Corporation. Internet security threat report volume 16. `http://www.symantec.com/content/en/us/enterprise/other_resources/b-istr_main_report_2011_21239364.en-us.pdf`, 2012.

[18] Gerald Teschl und Susanne Teschl. *Mathematik für Informatiker: Band 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin and Heidelberg, 3 edition, 2008. ISBN 978-3540774310.

[19] Olivier Thonnard und Marc Dacier. A strategic analysis of spam botnets operations. In *Proceedings of the 8th Annual Collaboration, Electronic messaging, Anti-Abuse and Spam Conference*, CEAS '11, pages 162–171, New York, NY, USA, 2011. ACM. ISBN 978-1-4503-0788-8. doi: 10.1145/2030376.2030395. URL `http://doi.acm.org/10.1145/2030376.2030395`.

[20] Jochen Herling und Karl-Heinz Kuhlmann und Uwe Scheele und Wilhelm Wilke. *Mathematik: Schülerband 8*. Westermann, Braunschweig, 1 edition, 2009. ISBN 3141218285.

[21] Claudia Eckert und Michael Herfert. Innovative lösungen mit dem elektronischen personalausweis - der darmstädter campuspilot. `http://www.sec.in.tum.de/assets/lehre/ss09/sms/Eckert_ePA.pdf`, 2009.

[22] Pang-Ning Tan und Michael Steinbach und Vipin Kumar. *Introduction to data mining*. Pearson Addison Wesley, Boston, 1 edition, 2005. ISBN 0321321367.

[23] A. Uthor. *Testing*. 2012.

Anhang

A. Lizenztext

Creative Commons Legal Code

Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland

CREATIVE COMMONS IST KEINE RECHTSANWALTSKANZLEI UND LEISTET KEINE RECHTSBERATUNG. DIE BEREITSTELLUNG DIESER LIZENZ FÜHRT ZU KEINEM MANDATSVERHÄLTNIS. CREATIVE COMMONS STELLT DIESE INFORMATIONEN OHNE GEWÄHR ZUR VERFÜGUNG. CREATIVE COMMONS ÜBERNIMMT KEINE GEWÄHRLEISTUNG FÜR DIE GELIEFERTEN INFORMATIONEN UND SCHLIEßT DIE HAFTUNG FÜR SCHÄDEN AUS, DIE SICH AUS DEREN GEBRAUCH ERGEBEN.

Lizenz

DER GEGENSTAND DIESER LIZENZ (WIE UNTER "SCHUTZGEGENSTAND" DEFINIERT) WIRD UNTER DEN BEDINGUNGEN DIESER CREATIVE COMMONS PUBLIC LICENSE ("CCPL", "LIZENZ" ODER "LIZENZVERTRAG") ZUR VERFÜGUNG GESTELLT. DER SCHUTZGEGENSTAND IST DURCH DAS URHEBERRECHT UND/ODER ANDERE GESETZE GESCHÜTZT. JEDE FORM DER NUTZUNG DES SCHUTZGEGENSTANDES, DIE NICHT AUFGRUND DIESER LIZENZ ODER DURCH GESETZE GESTATTET IST, IST UNZULÄSSIG.

DURCH DIE AUSÜBUNG EINES DURCH DIESE LIZENZ GEWÄHRTEN RECHTS AN DEM SCHUTZGEGENSTAND ERKLÄREN SIE SICH MIT DEN LIZENZBEDINGUNGEN RECHTSVERBINDLICH EINVERSTANDEN. SOWEIT DIESE LIZENZ ALS LIZENZVERTRAG ANZUSEHEN IST, GEWÄHRT IHNEN DER LIZENZGEBER DIE IN DER LIZENZ GENANNTEN RECHTE UNENTGELTLICH UND IM AUSTAUSCH DAFÜR, DASS SIE DAS GEBUNDENSEIN AN DIE LIZENZBEDINGUNGEN AKZEPTIEREN.

1. Definitionen

a. Der Begriff "**Abwandlung**" im Sinne dieser Lizenz bezeichnet das Ergebnis jeglicher Art von Veränderung des Schutzgegenstandes, solange die eigenpersönlichen Züge des Schutzgegenstandes darin nicht verblassen und daran eigene Schutzrechte entstehen. Das kann insbesondere eine Bearbeitung, Umgestaltung, Änderung, Anpassung, Übersetzung oder Heranziehung des Schutzgegenstandes zur Vertonung von Laufbildern sein. Nicht als Abwandlung des Schutzgegenstandes gelten seine Aufnahme in eine Sammlung oder ein Sammelwerk und die freie Benutzung des Schutzgegenstandes.

b. Der Begriff "**Sammelwerk**" im Sinne dieser Lizenz meint eine Zusammenstellung von literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalten, sofern diese Zusammenstellung aufgrund von Auswahl und Anordnung der darin enthaltenen selbständigen Elemente eine geistige Schöpfung darstellt, unabhängig davon, ob die Elemente systematisch oder methodisch angelegt und dadurch einzeln zugänglich sind oder nicht.

c. "**Verbreiten**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, den Schutzgegenstand oder Abwandlungen im Original oder in Form von Vervielfältigungsstücken, mithin in körperlich fixierter Form der Öffentlichkeit anzubieten oder in Verkehr zu bringen.

d. Unter "**Lizenzelementen**" werden im Sinne dieser Lizenz die folgenden übergeordneten Lizenzcharakteristika verstanden, die vom Lizenzgeber ausgewählt wurden und in der Bezeichnung der Lizenz zum Ausdruck kommen: "Namensnennung", "Weitergabe unter gleichen Bedingungen".

e. Der "**Lizenzgeber**" im Sinne dieser Lizenz ist diejenige natürliche oder juristische Person oder Gruppe, die den Schutzgegenstand unter den Bedingungen dieser Lizenz anbietet und insoweit als Rechteinhaberin auftritt.

f. "**Rechteinhaber**" im Sinne dieser Lizenz ist der Urheber des Schutzgegenstandes oder jede andere natürliche oder juristische Person oder Gruppe von Personen, die am Schutzgegenstand ein Immaterialgüterrecht erlangt hat, welches die in Abschnitt 3 genannten Handlungen erfasst und bei dem eine Einräumung von Nutzungsrechten oder eine Weiterübertragung an Dritte möglich ist.

g. Der Begriff "**Schutzgegenstand**" bezeichnet in dieser Lizenz den literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalt, der unter den Bedingungen dieser Lizenz angeboten wird. Das kann insbesondere eine persönliche geistige Schöpfung jeglicher Art, ein Werk der kleinen Münze, ein nachgelassenes Werk oder auch ein Lichtbild oder anderes Objekt eines verwandten Schutzrechts sein, unabhängig von der Art seiner Fixierung und unabhängig davon, auf welche Weise jeweils eine Wahrnehmung erfolgen kann, gleichviel ob in analoger oder digitaler Form.

Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, unterfallen auch sie dem Begriff "Schutzgegenstand" im Sinne dieser Lizenz.

h. Mit "**Sie**" bzw. "**Ihnen**" ist die natürliche oder juristische Person gemeint, die in dieser Lizenz im Abschnitt 3 genannte Nutzungen des Schutzgegenstandes vornimmt und zuvor in Hinblick auf den Schutzgegenstand nicht gegen Bedingungen dieser Lizenz verstoßen oder aber die ausdrückliche Erlaubnis des Lizenzgebers erhalten hat, die durch diese Lizenz gewährten Nutzungsrechte trotz eines vorherigen Verstoßes auszuüben.

i. Unter "**Öffentlich Zeigen**" im Sinne dieser Lizenz sind Veröffentlichungen und Präsentationen des Schutzgegenstandes zu verstehen, die für eine Mehrzahl von Mitgliedern der Öffentlichkeit bestimmt sind und in unkörperlicher Form mittels öffentlicher Wiedergabe in Form von Vortrag, Aufführung, Vorführung, Darbietung, Sendung, Weitersendung, zeit- und ortsunabhängiger Zugänglichmachung oder in körperlicher Form mittels Ausstellung erfolgen, unabhängig von bestimmten Veranstaltungen und unabhängig von den zum Einsatz kommenden Techniken und Verfahren, einschließlich drahtgebundener oder drahtloser Mittel und Einstellen in das Internet.

j. "**Vervielfältigen**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, mittels beliebiger Verfahren Vervielfältigungsstücke des Schutzgegenstandes herzustellen, insbesondere durch Ton- oder Bildaufzeichnungen, und umfasst auch den Vorgang, erstmals körperliche Fixierungen des Schutzgegenstandes sowie Vervielfältigungsstücke dieser Fixierungen anzufertigen, sowie die Übertragung des Schutzgegenstandes auf einen Bild- oder Tonträger oder auf ein anderes elektronisches Medium, gleichviel ob in digitaler oder analoger Form.

k. "**Mit Creative Commons kompatible Lizenz**" bezeichnet eine Lizenz, die unter https://creativecommons.org/compatiblelicenses aufgelistet ist und die durch Creative Commons als grundsätzlich zur vorliegenden Lizenz äquivalent akzeptiert wurde, da zumindest folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

Diese mit Creative Commons kompatible Lizenz

- i. enthält Bestimmungen, welche die gleichen Ziele verfolgen, die gleiche Bedeutung haben und die gleichen Wirkungen erzeugen wie die Lizenzelemente der vorliegenden Lizenz; und
- ii. erlaubt ausdrücklich das Lizenzieren von ihr unterstellten Abwandlungen unter vorliegender Lizenz, unter einer anderen rechtsordnungsspezifisch angepassten Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen, wie sie die vorliegende Lizenz aufweist, oder unter der entsprechenden Creative-Commons-Unported-Lizenz.

2. Schranken des Immaterialgüterrechts

Diese Lizenz ist in keiner Weise darauf gerichtet, Befugnisse zur Nutzung des Schutzgegenstandes zu vermindern, zu beschränken oder zu vereiteln, die Ihnen aufgrund der Schranken des Urheberrechts oder anderer Rechtsnormen bereits ohne Weiteres zustehen oder sich aus dem Fehlen eines immaterialgüterrechtlichen Schutzes ergeben.

3. Einräumung von Nutzungsrechten

Unter den Bedingungen dieser Lizenz räumt Ihnen der Lizenzgeber - unbeschadet unverzichtbarer Rechte und vorbehaltlich des Abschnitts 3.e) - das vergütungsfreie, räumlich und zeitlich (für die Dauer des Schutzrechts am Schutzgegenstand) unbeschränkte einfache Recht ein, den Schutzgegenstand auf die folgenden Arten und Weisen zu nutzen ("unentgeltlich eingeräumtes einfaches Nutzungsrecht für jedermann"):

a. Den Schutzgegenstand in beliebiger Form und Menge zu vervielfältigen, ihn in Sammelwerke zu integrieren und ihn als Teil solcher Sammelwerke zu vervielfältigen;
b. Abwandlungen des Schutzgegenstandes anzufertigen, einschließlich Übersetzungen unter Nutzung jedweder Medien, sofern deutlich erkennbar gemacht wird, dass es sich um Abwandlungen handelt;
c. den Schutzgegenstand, allein oder in Sammelwerke aufgenommen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten;
d. Abwandlungen des Schutzgegenstandes zu veröffentlichen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten.

e. Bezüglich Vergütung für die Nutzung des Schutzgegenstandes gilt Folgendes:

- i. **Unverzichtbare gesetzliche Vergütungsansprüche**: Soweit unverzichtbare Vergütungsansprüche im Gegenzug für gesetzliche Lizenzen vorgesehen oder Pauschalabgabensysteme (zum Beispiel für Leermedien) vorhanden sind, behält sich der Lizenzgeber das ausschließliche Recht vor, die entsprechende Vergütung einzuziehen für jede Ausübung eines Rechts aus dieser Lizenz durch Sie.
- ii. **Vergütung bei Zwangslizenzen**: Sofern Zwangslizenzen außerhalb dieser Lizenz vorgesehen sind und zustande kommen, verzichtet der Lizenzgeber für alle Fälle einer lizenzgerechten Nutzung des Schutzgegenstandes durch Sie auf jegliche Vergütung.
- iii. **Vergütung in sonstigen Fällen**: Bezüglich lizenzgerechter Nutzung des

Schutzgegenstandes durch Sie, die nicht unter die beiden vorherigen Abschnitte (i) und (ii) fällt, verzichtet der Lizenzgeber auf jegliche Vergütung, unabhängig davon, ob eine Einziehung der Vergütung durch ihn selbst oder nur durch eine Verwertungsgesellschaft möglich wäre.

Das vorgenannte Nutzungsrecht wird für alle bekannten sowie für alle noch nicht bekannten Nutzungsarten eingeräumt. Es beinhaltet auch das Recht, solche Änderungen am Schutzgegenstand vorzunehmen, die für bestimmte nach dieser Lizenz zulässige Nutzungen technisch erforderlich sind. Alle sonstigen Rechte, die über diesen Abschnitt hinaus nicht ausdrücklich durch den Lizenzgeber eingeräumt werden, bleiben diesem allein vorbehalten. Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten Schutzgegenstand dieser Lizenz oder Teil dessen sind und einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, verzichtet der Lizenzgeber auf sämtliche aus diesem Schutz resultierenden Rechte.

4. Bedingungen

Die Einräumung des Nutzungsrechts gemäß Abschnitt 3 dieser Lizenz erfolgt ausdrücklich nur unter den folgenden Bedingungen:

a. Sie dürfen den Schutzgegenstand ausschließlich unter den Bedingungen dieser Lizenz verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie müssen dabei stets eine Kopie dieser Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen dieser Lizenz oder die durch diese Lizenz gewährten Rechte beschränken. Sie dürfen den Schutzgegenstand nicht unterlizenzieren. Bei jeder Kopie des Schutzgegenstandes, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise unverändert lassen, die auf diese Lizenz und den Haftungsausschluss hinweisen. Wenn Sie den Schutzgegenstand verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf den Schutzgegenstand) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer des Schutzgegenstandes in der Ausübung der ihm durch diese Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.a) gilt auch für den Fall, dass der Schutzgegenstand einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt dieser Lizenz unterstellt werden muss. Sofern Sie ein Sammelwerk erstellen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin aus dem Sammelwerk die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen. Wenn Sie eine Abwandlung vornehmen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin von der Abwandlung die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen.

b. Sie dürfen eine Abwandlung ausschließlich unter den Bedingungen

   i. dieser Lizenz,
   ii. einer späteren Version dieser Lizenz mit denselben Lizenzelementen,
   iii. einer rechtsordnungsspezifischen Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts (z.B. Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 US),
   iv. der Creative-Commons-Unported-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts, oder
   v. einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz

   verbreiten oder öffentlich zeigen.

   Falls Sie die Abwandlung gemäß Abschnitt (v) unter einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen Folge leisten.

   Falls Sie die Abwandlungen unter einer der unter (i)-(iv) genannten Lizenzen ("Verwendbare Lizenzen") lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen sowie folgenden Bestimmungen Folge leisten: Sie müssen stets eine Kopie der verwendbaren Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen, wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen der verwendbaren Lizenz oder die durch sie gewährten Rechte beschränken. Bei jeder Abwandlung, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise auf die verwendbare Lizenz und den Haftungsausschluss unverändert lassen. Wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf die Abwandlung) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer der Abwandlung in der Ausübung der ihm durch die verwendbare Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.b) gilt auch für den Fall, dass die Abwandlung einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt der verwendbaren Lizenz unterstellt werden muss.

c. Die Verbreitung und das öffentliche Zeigen des Schutzgegenstandes oder auf ihm aufbauender Abwandlungen oder ihn enthaltender Sammelwerke ist Ihnen nur unter der Bedingung gestattet, dass Sie, vorbehaltlich etwaiger Mitteilungen im Sinne von Abschnitt 4.a), alle dazu gehörenden

Rechtevermerke unberührt lassen. Sie sind verpflichtet, die Rechteinhaberschaft in einer der Nutzung entsprechenden, angemessenen Form anzuerkennen, indem Sie - soweit bekannt - Folgendes angeben:

i. Den Namen (oder das Pseudonym, falls ein solches verwendet wird) des Rechteinhabers und / oder, falls der Lizenzgeber im Rechtevermerk, in den Nutzungsbedingungen oder auf andere angemessene Weise eine Zuschreibung an Dritte vorgenommen hat (z.B. an eine Stiftung, ein Verlagshaus oder eine Zeitung) ("Zuschreibungsempfänger"), Namen bzw. Bezeichnung dieses oder dieser Dritten;
ii. den Titel des Inhaltes;
iii. in einer praktikablen Form den Uniform-Resource-Identifier (URI, z.B. Internetadresse), den der Lizenzgeber zum Schutzgegenstand angegeben hat, es sei denn, dieser URI verweist nicht auf den Rechtevermerk oder die Lizenzinformationen zum Schutzgegenstand;
iv. und im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes in Übereinstimmung mit Abschnitt 3.b) einen Hinweis darauf, dass es sich um eine Abwandlung handelt.

Die nach diesem Abschnitt 4.c) erforderlichen Angaben können in jeder angemessenen Form gemacht werden; im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes oder eines Sammelwerkes müssen diese Angaben das Minimum darstellen und bei gemeinsamer Nennung mehrerer Rechteinhaber dergestalt erfolgen, dass sie zumindest ebenso hervorgehoben sind wie die Hinweise auf die übrigen Rechteinhaber. Die Angaben nach diesem Abschnitt dürfen Sie ausschließlich zur Angabe der Rechteinhaberschaft in der oben bezeichneten Weise verwenden. Durch die Ausübung Ihrer Rechte aus dieser Lizenz dürfen Sie ohne eine vorherige, separat und schriftlich vorliegende Zustimmung des Lizenzgebers und / oder des Zuschreibungsempfängers weder explizit noch implizit irgendeine Verbindung zum Lizenzgeber oder Zuschreibungsempfänger und ebenso wenig eine Unterstützung oder Billigung durch ihn andeuten.

d. Die oben unter 4.a) bis c) genannten Einschränkungen gelten nicht für solche Teile des Schutzgegenstandes, die allein deshalb unter den Schutzgegenstandsbegriff fallen, weil sie als Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen.
e. Persönlichkeitsrechte bleiben - soweit sie bestehen - von dieser Lizenz unberührt.

5. Gewährleistung

SOFERN KEINE ANDERS LAUTENDE, SCHRIFTLICHE VEREINBARUNG ZWISCHEN DEM LIZENZGEBER UND IHNEN GESCHLOSSEN WURDE UND SOWEIT MÄNGEL NICHT ARGLISTIG VERSCHWIEGEN WURDEN, BIETET DER LIZENZGEBER DEN SCHUTZGEGENSTAND UND DIE EINRÄUMUNG VON RECHTEN UNTER AUSSCHLUSS JEGLICHER GEWÄHRLEISTUNG AN UND ÜBERNIMMT WEDER AUSDRÜCKLICH NOCH KONKLUDENT GARANTIEN IRGENDEINER ART. DIES UMFASST INSBESONDERE DAS FREISEIN VON SACH- UND RECHTSMÄNGELN, UNABHÄNGIG VON DEREN ERKENNBARKEIT FÜR DEN LIZENZGEBER, DIE VERKEHRSFÄHIGKEIT DES SCHUTZGEGENSTANDES, SEINE VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK SOWIE DIE KORREKTHEIT VON BESCHREIBUNGEN. DIESE GEWÄHRLEISTUNGSBESCHRÄNKUNG GILT NICHT, SOWEIT MÄNGEL ZU SCHÄDEN DER IN ABSCHNITT 6 BEZEICHNETEN ART FÜHREN UND AUF SEITEN DES LIZENZGEBERS DAS JEWEILS GENANNTE VERSCHULDEN BZW. VERTRETENMÜSSEN EBENFALLS VORLIEGT.

6. Haftungsbeschränkung

DER LIZENZGEBER HAFTET IHNEN GEGENÜBER IN BEZUG AUF SCHÄDEN AUS DER VERLETZUNG DES LEBENS, DES KÖRPERS ODER DER GESUNDHEIT NUR, SOFERN IHM WENIGSTENS FAHRLÄSSIGKEIT VORZUWERFEN IST, FÜR SONSTIGE SCHÄDEN NUR BEI GROBER FAHRLÄSSIGKEIT ODER VORSATZ, UND ÜBERNIMMT DARÜBER HINAUS KEINERLEI FREIWILLIGE HAFTUNG.

7. Erlöschen

a. Diese Lizenz und die durch sie eingeräumten Nutzungsrechte erlöschen mit Wirkung für die Zukunft im Falle eines Verstoßes gegen die Lizenzbedingungen durch Sie, ohne dass es dazu der Kenntnis des Lizenzgebers vom Verstoß oder einer weiteren Handlung einer der Vertragsparteien bedarf. Mit natürlichen oder juristischen Personen, die Abwandlungen des Schutzgegenstandes oder diesen enthaltende Sammelwerke unter den Bedingungen dieser Lizenz von Ihnen erhalten haben, bestehen nachträglich entstandene Lizenzbeziehungen jedoch solange weiter, wie die genannten Personen sich ihrerseits an sämtliche Lizenzbedingungen halten. Darüber hinaus gelten die Ziffern 1, 2, 5, 6, 7, und 8 auch nach einem Erlöschen dieser Lizenz fort.
b. Vorbehaltlich der oben genannten Bedingungen gilt diese Lizenz unbefristet bis der rechtliche Schutz für den Schutzgegenstand ausläuft. Davon abgesehen behält der Lizenzgeber das Recht, den Schutzgegenstand unter anderen Lizenzbedingungen anzubieten oder die eigene Weitergabe des Schutzgegenstandes jederzeit einzustellen, solange die Ausübung dieses Rechts nicht einer

Kündigung oder einem Widerruf dieser Lizenz (oder irgendeiner Weiterlizenzierung, die auf Grundlage dieser Lizenz bereits erfolgt ist bzw. zukünftig noch erfolgen muss) dient und diese Lizenz unter Berücksichtigung der oben zum Erlöschen genannten Bedingungen vollumfänglich wirksam bleibt.

8. Sonstige Bestimmungen

a. Jedes Mal wenn Sie den Schutzgegenstand für sich genommen oder als Teil eines Sammelwerkes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
b. Jedes Mal wenn Sie eine Abwandlung des Schutzgegenstandes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz am ursprünglichen Schutzgegenstand zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
c. Sollte eine Bestimmung dieser Lizenz unwirksam sein, so bleibt davon die Wirksamkeit der Lizenz im Übrigen unberührt.
d. Keine Bestimmung dieser Lizenz soll als abbedungen und kein Verstoß gegen sie als zulässig gelten, solange die von dem Verzicht oder von dem Verstoß betroffene Seite nicht schriftlich zugestimmt hat.
e. Diese Lizenz (zusammen mit in ihr ausdrücklich vorgesehenen Erlaubnissen, Mitteilungen und Zustimmungen, soweit diese tatsächlich vorliegen) stellt die vollständige Vereinbarung zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen in Bezug auf den Schutzgegenstand dar. Es bestehen keine Abreden, Vereinbarungen oder Erklärungen in Bezug auf den Schutzgegenstand, die in dieser Lizenz nicht genannt sind. Rechtsgeschäftliche Änderungen des Verhältnisses zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen sind nur über Modifikationen dieser Lizenz möglich. Der Lizenzgeber ist an etwaige zusätzliche, einseitig durch Sie übermittelte Bestimmungen nicht gebunden. Diese Lizenz kann nur durch schriftliche Vereinbarung zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber modifiziert werden. Derlei Modifikationen wirken ausschließlich zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen und wirken sich nicht auf die Dritten gemäß Ziffern 8.a) und b) angeboteten Lizenzen aus.
f. Sofern zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber keine anderweitige Vereinbarung getroffen wurde und soweit Wahlfreiheit besteht, findet auf diesen Lizenzvertrag das Recht der Bundesrepublik Deutschland Anwendung.

Creative Commons Notice

Creative Commons ist nicht Partei dieser Lizenz und übernimmt keinerlei Gewähr oder dergleichen in Bezug auf den Schutzgegenstand. Creative Commons haftet Ihnen oder einer anderen Partei unter keinem rechtlichen Gesichtspunkt für irgendwelche Schäden, die - abstrakt oder konkret, zufällig oder vorhersehbar - im Zusammenhang mit dieser Lizenz entstehen. Unbeschadet der vorangegangen beiden Sätze, hat Creative Commons alle Rechte und Pflichten eines Lizenzgebers, wenn es sich ausdrücklich als Lizenzgeber im Sinne dieser Lizenz bezeichnet.

Creative Commons gewährt den Parteien nur insoweit das Recht, das Logo und die Marke "Creative Commons" zu nutzen, als dies notwendig ist, um der Öffentlichkeit gegenüber kenntlich zu machen, dass der Schutzgegenstand unter einer CCPL steht. Ein darüber hinaus gehender Gebrauch der Marke "Creative Commons" oder einer verwandten Marke oder eines verwandten Logos bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung von Creative Commons. Jeder erlaubte Gebrauch richtet sich nach der Creative Commons Marken-Nutzungs-Richtlinie in der jeweils aktuellen Fassung, die von Zeit zu Zeit auf der Website veröffentlicht oder auf andere Weise auf Anfrage zugänglich gemacht wird. Zur Klarstellung: Die genannten Einschränkungen der Markennutzung sind nicht Bestandteil dieser Lizenz.

Creative Commons kann kontaktiert werden über https://creativecommons.org/.

B. Teilbarkeit

B.1 Sieb des Eratosthenes

Der Algorithmus zum Sieb des Eratosthenes wird verwendet, um die Primzahlen aus einem Zahlenbereich $[a, b]$ herauszufiltern.

Schritt 1: Zahlen von 2 ... 64

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Schritt 2: Lösche Vielfaches von 2

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Primz.: 2

Schritt 3: Lösche Vielfaches von 3

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Primz.: 2, 3

Schritt 4: Lösche Vielfaches von 5

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Primz.: 2, 3, 5

Schritt 5: Lösche Vielfaches von 7

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Primz.: 2, 3, 5, 7

Schritt 6: Verbleibende Primzahlen

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Primz.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61

Die Schritte müssen nur bis zur Zahl x durchgeführt werden, solange $x \leq \sqrt{b}$. Beispiel: Der Zahlenbereich ist wie folgt angegeben: $[1, 9]$. Die erste zu testende Zahl lautet $x = 1$. Da $x \leq \sqrt{9}$ ist, wird für diese Zahl der Algorithmus angewandt. Erhöht man x um $+1$, so ist die Bedingung $x \leq \sqrt{9}$ weiterhin erfüllt. Nun werden alle Vielfache der Zahl 2 gestrichen. Selbiges Verfahren wird auch auf die Zahl $x = 3$ angewandt. Für die Zahl $x = 4$ ist die Bedingung $x \leq \sqrt{9}$ nicht erfüllt. Sie braucht nicht mehr getestet werden. Die verbleibenden Zahlen können abgelesen werden. Hierbei handelt es sich um Primzahlen.

Stichwörter