

Vorkurs Mathematik

Autoren:

Prof. Dr. Harald Baier

Prof. Dr. Jessica Steinberger

Modul 1

Vorkurs Mathematik

Studienbrief 1: Arithmetik

Studienbrief 2: Algebra und diskrete Mathematik

Studienbrief 3: Geometrie

Studienbrief 4: Funktionen

Studienbrief 5: Differentialrechnung

Autoren:

Prof. Dr. Harald Baier

Prof. Dr. Jessica Steinberger

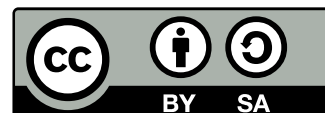
6. Auflage

CODE FI

© 2024 CODE FI
Universität der Bundeswehr München
Forschungsinstitut Cyber Defence
Carl-Wery-Straße 18
81739 München

6. Auflage (27. Juni 2024)

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons „Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland“ Lizenz.



Um die Lesbarkeit zu vereinfachen, wird auf die zusätzliche Formulierung der weiblichen Form bei Personenbezeichnungen verzichtet. Wir weisen deshalb darauf hin, dass die Verwendung der männlichen Form explizit als geschlechtsunabhängig verstanden werden soll.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung zu den Studienbriefen	6
I. Abkürzungen der Randsymbole und Farbkodierungen	6
II. Zu den Autoren	7
III. Modullehrziele	8
IV. Errata	18
Studienbrief 1 Arithmetik	19
1.1 Lernergebnisse	19
1.2 Zahlen	20
1.3 Grundlegende Rechenregeln	24
1.3.1 Kommutativgesetz	24
1.3.2 Assoziativgesetz	24
1.3.3 Distributivgesetz	25
1.4 Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen	26
1.4.1 Erweitern eines Bruches	27
1.4.2 Kürzen eines Bruches	28
1.4.3 Addition und Subtraktion von Brüchen	28
1.4.4 Multiplikation von Brüchen	29
1.4.5 Kehrwertbildung	29
1.4.6 Division von Brüchen (Doppelbruch)	30
1.5 Rechnen mit Summen- und Produktzeichen	30
1.5.1 Summenzeichen	30
1.5.2 Produktzeichen	34
1.5.3 Indexverschiebung	35
1.6 Rechnen mit Fakultäten	36
1.7 Übungsaufgaben	38
Studienbrief 2 Algebra und diskrete Mathematik	41
2.1 Lernergebnisse	41
2.2 Advance Organizer	41
2.3 Teilbarkeitsregeln	42
2.4 Division mit Rest	43
2.5 Primzahlen	45
2.6 Primfaktorenzerlegung	45
2.7 Gemeinsame Teiler	46
2.7.1 Größter gemeinsamer Teiler	46
2.7.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches	47
2.8 Definition und Darstellung von Mengen	49
2.8.1 Definition von Mengen	49
2.8.2 Operationen auf Mengen	50
2.9 Elementare Algebra	54
2.9.1 Terme und Gleichungen	54
2.9.2 Terme mit mehreren Variablen	56
2.9.3 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	59
2.9.4 Potenzen und Wurzel	66
2.9.5 Quadratische Gleichungen und Wurzelgleichungen	69
2.10 Übungsaufgaben	73
Studienbrief 3 Geometrie	77
3.1 Lernergebnisse	77
3.2 Advance Organizer	77
3.3 Geometrische Körper und Figuren	78
3.3.1 Figuren und Winkel	78

3.3.2	Dreiecke und Vierecke	79
3.3.3	Kreis und Gerade	84
3.3.4	Flächen	87
3.3.5	Symmetrie	93
3.3.6	Kongruenzsätze	98
3.3.7	Strahlensätze	100
3.3.8	Körper	103
3.4	Übungsaufgaben	108
Studienbrief 4 Funktionen		111
4.1	Lernergebnisse	111
4.2	Advance Organizer	111
4.3	Zuordnungen	112
4.3.1	Definition von Zuordnungen	112
4.3.2	Proportionale Zuordnungen	113
4.3.3	Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen	115
4.3.4	Antiproportionale Zuordnungen	116
4.3.5	Dreisatz bei antiproportionaler Zuordnung	118
4.3.6	Zusammengesetzte Zuordnungen	119
4.4	Funktionen	121
4.4.1	Definition von Funktionen	121
4.4.2	Definition von Umkehrfunktionen	122
4.4.3	Ganzrationale Funktionen	124
4.4.4	Trigonometrische Funktionen	131
4.4.5	Exponentialfunktionen	143
4.4.6	Wurzelfunktion	152
4.5	Übungsaufgaben	153
Studienbrief 5 Differentialrechnung		157
5.1	Lernergebnisse	157
5.2	Advance Organizer	157
5.3	Änderungsverhalten von Funktionen	158
5.3.1	Grenzwerte von Funktionen	158
5.3.2	Stetigkeit	159
5.3.3	Differenzenquotient und Steigung	160
5.3.4	Ableitungsregeln	163
5.3.5	Ableitung der trigonometrischen Funktionen	166
5.3.6	Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion	166
5.4	Funktionsuntersuchung	169
5.4.1	Nullstellen	169
5.4.2	Symmetrie	178
5.4.3	Extremstellen und Extremwerte	179
5.4.4	Krümmungsverhalten und Wendepunkte	181
5.4.5	Mehrfache Nullstellen	182
5.4.6	Beispiel einer vollständigen Funktionsuntersuchung	183
5.5	Extremwertproblem	185
5.6	Funktionsbestimmungen	187
5.7	Funktionsscharen	193
5.8	Wachstums- und Zerfallprozesse	198
5.8.1	Lineares Wachstum	198
5.8.2	Exponentielles Wachstum	199
5.8.3	Begrenztes Wachstum	201
Liste der Lösungen zu den Kontrollaufgaben		205
Verzeichnisse		267
I.	Abbildungen	267
II.	Beispiele	268

III.	Definitionen	270
IV.	Kontrollaufgaben	271
V.	Sätze	273
VI.	Tabellen	274
VII.	Literatur	274
Liste der Lösungen zu den Übungen		277
Anhang		299
A.	Lizenztext	299
B.	Teilbarkeit	304
B.1	Sieb des Eratosthenes	304
Stichwörter		305

Einleitung zu den Studienbriefen**I. Abkürzungen der Randsymbole und Farbkodierungen**

Axiom	A
Beispiel	B
Definition	D
Kontrollaufgabe	K
Merksatz	M
Satz	S
Übung	Ü

II. Zu den Autoren



Harald Baier promovierte 2002 an der TU Darmstadt über eine Arbeit zur effizienten Erzeugung elliptischer Kurven. Er war Mitarbeiter in einem Sicherheitsprojekt der Deutsche Bank AG und baute das Darmstädter Zentrum für IT-Sicherheit auf. Nach einer Professorentätigkeit an der FH Bingen (2004-2009) und an der Hochschule Darmstadt (2009-2020) ist er seit 01.09.2020 an der Universität der Bundeswehr München auf dem Gebiet der digitalen Forensik tätig. Schwerpunkte seiner Arbeit sind der Umgang mit großen Datenmengen in IT-forensischen Untersuchungen, Erzeugung synthetischer Datensätze für die Bewertung IT-forensischer Tools, Anti-Forensik sowie Hauptspeicherforensik.



Jessica Steinberger absolvierte eine Ausbildung zur Fachinformatikerin für Systemintegration und beendete diese im Jahr 2003. Anschließend begann sie ihr Studium an der Fachhochschule Bingen und schloss das Studium Bachelor of Science Informatik im Jahr 2009 ab. Darauf folgte das Studium Master-Studiengang Informationssysteme, welches sie im Jahr 2011 beendete. Von 2011 bis 2017 war sie Mitarbeiterin der Forschungsgruppe da/sec - Biometrics and Internet Security Research Group der Hochschule Darmstadt und promovierte 2018 an der UT Twente. Seit 2022 ist sie Professorin an der Hochschule Mannheim.

III. Modullehrziele

Die Studierenden kennen die grundlegenden Bausteine der Mathematik wie die Mengen der Zahlen, die Geometrie und die Funktionen. Sie kennen die grundlegenden Rechenregeln wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz und können diese anwenden. Die Studierenden sind in der Lage Bruchrechnungen (Erweitern, Kürzen, Addieren und Subtrahieren sowie Multiplizieren und Dividieren), Prozent- und Promillerechnung durchzuführen. Die Studierenden kennen unterschiedliche Teilbarkeitsregel und sind in der Lage diese aufzulisten und anzuwenden.

Neben den Themen der Bruchrechnung und der Finanzmathematik kennen die Studierende die Begrifflichkeiten der Terme und Gleichungen und können lineare Gleichungen und Gleichungssysteme zu lösen.

Die Studierenden sollen lineare Ungleichungen und lineare Ungleichungssysteme berechnen sowie deren Anwendung bei Optimierungsaufgaben kennen.

Die Studierenden kennen unterschiedliche geometrische Körper und Figuren, Winkel und Symmetrien.

Die Studierenden können unterschiedliche Flächen- und Volumeneinheiten auflisten und sind der Lage eine Einheit in eine andere Einheit zu transferieren. Darüber hinaus können sie die Fläche- und das Volumen von Objekten berechnen.

Die Studierenden können entscheiden, ob Zuordnungen proportional oder antiproportional sind und können Aufgaben mit dem dazugehörigen Dreisatz berechnen.

Die Studierenden kennen die unterschiedlichen Arten von Funktionen (ganzrationale Funktion, trigonometrische Funktion, Exponentialfunktion und Wurzelfunktion) und können die Begriffe Funktionen und Umkehrfunktion auseinanderhalten und erklären.

Die Studierenden kennen unterschiedliche Ableitungsfunktionen und können mit deren Hilfe die ersten Ableitungen elementarer Funktionen bilden. Weiterhin können die Studierende eine vollständige Funktionsuntersuchung durchführen und Extremwertaufgaben lösen. Die Studierenden kennen den Begriff der Funktionsscharen. Zu dem können Sie Wachstums- und Zerfallprozesse identifizieren und berechnen.

Modulbeschreibung

Modulbezeichnung:	Vorkurs
Verwendbarkeit:	Bachelorstudiengang Informatik/IT-Sicherheit (Vorbereitung auf den Bachelor IT-Sicherheit und ggfs. bei erfolgreichem Abschluss fachgebundener Hochschulzugang)
Lehrveranstaltungen und Lehrformen:	Mischung aus Präsenz- und Onlineveranstaltung
Modulverantwortliche(r):	Prof. Dr. Harald Baier
Lehrende:	Prof. Dr. Harald Baier
Dauer:	2.5 Monate
Credits:	Für Vorbereitungskurse werden keine Credits nach ECTS vergeben
Studien- und Prüfungsleistungen:	schriftliche Prüfung
Berechnung der Modulnote:	
Notwendige Voraussetzungen:	keine
Empfohlene Voraussetzungen:	keine
Unterrichts- und Prüfungssprache:	Deutsch
Zuordnung des Moduls zu den Fachgebieten des Curriculums:	
Einordnung ins Fachsemester:	
Arbeitsaufwand bzw. Gesamtworkload:	90 Zeitstunden
Lerninhalte:	<ul style="list-style-type: none"> • Arithmetik (Zahlen, grundlegende Rechenregeln, Bruchrechnung, Finanzmathematik) • Algebra und diskrete Mathematik (Teilbarkeiten, Mengen, Elementare Algebra) • Geometrie (Figuren und Winkel, Dreiecke und Vierecke, Kreis und Gerade, Flächen, Symmetrie, Kongruenzsätze, Strahlensätze, Körper) • Funktionen und ihre Darstellung (Zuordnungen, Definition von Funktionen, ganzrationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen und Wurzelfunktionen) • Differentialrechnung (Ableitungsfunktionen, vollständige Funktionsuntersuchung, Extremwertaufgaben, Funktionscharen sowie Wachstums- und Zerfallprozesse).

Angestrebte Lernergebnisse:	<p><i>Fachkompetenz:</i> Die Studierenden kennen die grundlegenden Rechenregeln und können diese anwenden. Sie können Rechenregeln wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz anwenden und Brüche, Prozent- und Promilleaufgaben berechnen. Des Weiteren können die Studierenden lineare Gleichungen und Ungleichungen aufstellen und Gleichungssysteme berechnen. Die Studierenden haben die Kenntnisse der unterschiedlichen geometrischen Körper und Figuren, Winkel und Symmetrien. Sie sind in der Lage unterschiedliche Flächen- und Volumeneinheiten auflisten und eine Einheit in eine andere Einheit zu transferieren. Darüber hinaus können sie die Fläche- und das Volumen von Objekten berechnen. Darüber hinaus können Sie die unterschiedlichen Arten von Funktionen erläutern und haben Kenntnisse über ihre grundlegenden Eigenschaften. Zusätzlich sind die Studierenden in der Lage die Begrifflichkeiten aus der Differentialrechnung zu definieren und anzuwenden.</p> <p><i>Methodenkompetenz:</i> Die Studierenden erwerben die Fähigkeit, mit den Lerninhalten des Moduls aktiv umgehen zu können und können Fragestellungen, Aufgaben und Probleme, die sich aus der Lehrveranstaltung ergeben, selbstständig bearbeiten und lösen.</p> <p><i>Sozialkompetenz:</i> Die Studierenden können durch Gruppenarbeit an den Präsenzwochenenden Übungsaufgaben kooperativ lösen und in Teams arbeiten. Darüber hinaus besitzen sie die Fähigkeit, in komplexen Situationen zu handeln und Lösungen für die Aufgabenstellung zu entwickeln.</p> <p><i>Selbstkompetenz:</i> Die Studierenden können aufgrund der Teamarbeit problemorientiert diskutieren. Sie haben die Fähigkeit, sich eine Meinung über die Themen zu bilden und können das erlangte Wissen im Bereich der Informatik einsetzen.</p>
Häufigkeit des Angebots:	Sommersemester
Medienformen:	Studienbriefe inklusive Übungen in schriftlicher und elektronischer Form, Onlinematerial in Lernplattform, Online-Konferenzen, Präsenzveranstaltung mit Rechner und Beamer

Literatur:	<ul style="list-style-type: none">• Lambacher-Schweizer, Ausgabe Bayern, Mathematik für Gymnasien, Klett Verlag, ISBN: 978-3-12-732760-1• Lambacher-Schweizer, Ausgabe Bayern, Mathematik für Gymnasien, Klett Verlag, ISBN: 978-3-12-732860-8• Gerald Teschl und Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik, Springer Verlag, ISBN: 978-3540280644• Gerald Teschl und Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra, Springer Verlag, ISBN: 978-3540774310• Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-1749-5• Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-1227-8• Lothar Papula, Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer Vieweg, ISBN: 978-3-8348-0757-1
------------	--

Mathematische Zeichen

Beziehungszeichen

$=$	gleich	\approx	ungefähr gleich
\leq	kleiner oder gleich	$<$	kleiner
$>$	größer	\geq	größer oder gleich
\neq	ungleich		

Konstanten

const	konstante Größe (Konstante)	π	Verhältnis des Kreisumfangs zu Kreisdurchmesser
e	Eulersche Zahl		

Logik

A, B	Aussagen	$\bar{A}, \neg A$	Negation der Aussage A
$A \wedge B$	Konjunktion, logisches UND	$A \vee B$	Disjunktion, logisches ODER
$A \Rightarrow B$	Implikation, WENN A , DANN B	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz, A GENAU DANN, WENN B

Mengen und Quantoren

A, B, C	Mengen	\bar{A}	Komplementmenge von A
$A \subset B$	A ist (echte) Teilmenge von B	$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \setminus B$	Differenzmenge	$A \times B$	Kartesisches Produkt
$x \in A$	x ist Element von A	$x \notin A$	x ist nicht Element von A
$A \cap B$	Durchschnitt zweier Mengen	$A \cup B$	Vereinigung zweier Mengen
\emptyset	leere Menge		
$\forall x$	für alle Elemente x	$\exists x$	es existiert ein Element x
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	$(a, b),]a, b[$	offenes Intervall
$(a, b),]a, b[$	linksoffenes Intervall	$[a, b), [a, b[$	rechtsoffenes Intervall

Algebra

\vec{a}	Vektor	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren
$ \vec{a} $	Betrag, Länge des Vektors \vec{a}	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt	$\vec{0}$	Nullvektor
$\lambda \vec{a}$	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	Spatprodukt (gemischtes Produkt)
$\mathbf{A} = (a_{ij})$	Matrix \mathbf{A} mit den Elementen a_{ij}	\mathbf{A}^T	transponierte Matrix zu \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	inverse Matrix zu \mathbf{A}	\mathbf{A}^*	konjugiert transponierte Matrix zu \mathbf{A}
$\det(\mathbf{A})$	Determinante der quadratischen Matrix \mathbf{A}	\mathbf{E}_n	$(n \times n)$ -Einheitsmatrix

Zahlenmengen

\emptyset	leere Menge	\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
i, j	imaginäre Einheit	$\operatorname{Re}(z)$	Realteil der Zahl z
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil der Zahl z	$ z $	Betrag von z
z^*	konjugiert komplexe Zahl zu z		

Zahlentheorie

$a \mid b$	a teilt b	$a \nmid b$	a teilt b nicht
$a \equiv b \pmod n$	a ist kongruent zu b modulo n	p, q	Primzahlen
$\operatorname{ggT}(a, b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b	$\operatorname{kgV}(a, b)$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
(G, \circ)	Gruppe G mit Verknüpfung \circ	$(\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der ganzen Zahlen bezüglich der Addition
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Restklassen modulo n	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	Gruppe der Restklassen modulo n bezüglich der Addition

Analysis

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	a ist Grenzwert der Folge a_n
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$	b ist Grenzwert der Funktion $f(x)$, wenn x gegen x_0 strebt
$\sum_{n=1}^k$	Summe mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\prod_{n=1}^k$	Produkt mit dem Laufindex n von 1 bis k
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0
$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$	erste, zweite, \dots , n -te Ableitung der Funktion $f(x)$
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b
$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral der Funktion f

Stochastik

Ω	Ergebnismenge
A	Ereignis des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (es gilt $A \subset \Omega$)
\bar{A}	Gegenereignis zu A (d.h. $\bar{A} = \Omega \setminus A$)
$\mathcal{P}(\Omega)$	Menge aller Ereignisse des durch Ω dargestellten Zufallsexperiments (formal ist das die Potenzmenge von Ω)
\Pr	Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Ergebnismenge Ω
$\Pr(A B)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
\bar{x}	Arithmetisches Mittel einer gegebenen Datenmenge
R	Spannweite einer gegebenen Datenmenge
Q	Quartil einer gegebenen Datenmenge
IQR	Interquartilsabstand einer gegebenen Datenmenge
σ_x^2	Varianz einer Stichprobe
σ_x	Standardabweichung einer Stichprobe
$H(X)$	Entropie einer diskreten Zufallsvariablen X

Strukturelemente der Mathematik

Während der Durcharbeitung der Studienbriefe werden Ihnen immer wieder unterschiedliche Elemente begegnen, um die Ergebnisse zu strukturieren und darzustellen. Hierzu verwenden Mathematiker Sätze, Beweise, Definitionen sowie Axiome. Nachfolgend werden wir nun die Bedeutung der einzelnen Elemente beschreiben.

(Mathematischer) Satz

Bei einem mathematischen Satz (oder auch Theorem genannt) handelt es sich um eine sehr wichtige wahre und bewiesene Aussage. Typischerweise lassen wir das Adjektiv 'mathematisch' weg und sprechen nur von einem *Satz*.

S

Satz 0.1: Der große Satz von Fermat

Wenn die natürliche Zahl $n > 2$ ist, hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine natürlichen Zahlen x, y und z als Lösungen.

Beweis

Bei einem Beweis handelt es sich um eine Begründung, warum eine Aussage (zum Beispiel eines mathematischen Satzes) wahr ist. Das bedeutet, dass sich jede Aussage eines Satzes beweisen lassen muss. In einem Beweis werden zunächst die Voraussetzungen festgehalten, anschließend wird eine Behauptung formuliert und der eigentliche Beweis begonnen. Das Ende eines Beweises ist entweder mit „qed“ (quod erat demonstrandum) oder mit ■ gekennzeichnet.

Wir beweisen den nachfolgenden Satz wie folgt:

S

Satz 0.2

Es sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Beweis durch Induktion:

Da wir die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen müssen, setzen wir $N_1 = 1$.

- *Induktionsanfang:* Für $N_1 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{N_1} k = 1$ und $\frac{N_1 \cdot (N_1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Also gilt die Behauptung des Satzes für $N_1 = 1$.
- *Induktionsvoraussetzung:* Es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
- *Induktionsschluss:* Es sei $n \geq 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^n k) + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1$. In der letzten Gleichung haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet. Es folgt $\frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. Der Induktionsschluss ist also gelungen.

Das zeigt die Richtigkeit des Satzes. ■

Beweise in diesem Studienbrief sind der Vollständigkeit halber aufgeführt und behandeln optionalen weiterführenden Stoff für Interessierte. Wir raten Ihnen dennoch, sich diese Elemente anzuschauen und nachzuvollziehen.

Definition

Eine Definition ist eine mathematische Erklärung eines neuen Begriffes. Definitionen können weder wahr noch falsch sein. Definitionen sind wohldefiniert und führen nicht zu Widersprüchen.

Definition 0.1: Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion ist die Funktion, die jeder nicht negativen reellen Zahl x die nicht negative reelle Lösung y der Gleichung $x = y^2$ zuordnet.

D**Axiom**

Axiome beschreiben mathematische Grundwahrheiten, für die es keinen Beweis gibt. Sie sind eine Art 'Grundwahrheiten' der Mathematik. Die Gesamtheit der Axiome heißt das *Axiomensystem*.

Axiom 0.1: Kleinstes Element einer nichtleeren Menge

Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

A

IV. Errata

Gegenüber der fünften Auflage sind folgende Korrekturen vorgenommen worden:

- In Kontrollaufgabe 2.17 a) war Gleichung III falsch dargestellt (als Gerade $y = x$ statt der Gerade $x = 0$).
- In Kontrollaufgabe 2.17 b) wurden die Linien dem Ungleichheitszeichen angepasst, d.h. auf Grund des jeweiligen \geq bzw. \leq wird jetzt eine durchgezogene Linie dargestellt.
- Kontrollaufgabe 2.18: In Teilaufgabe f) war die Klammer unklar gesetzt. Die Lösungen zu den Teilaufgaben g) und h) waren vertauscht.
- Kontrollaufgabe 2.20 d): In der Aufgabenstellung war nur ein Term gegeben, aber keine Gleichung. Der Term wurde entsprechend Null gesetzt. Die Lösung wurde vereinfacht.
- Kontrollaufgabe 2.7 c): Fehler in Restglied korrigiert
- Darstellung der Grenzwerte in Kap. 5 angepasst

Studienbrief 1 Arithmetik

Die Arithmetik ist die Grammatik der Zahlen.

LUDWIG WITTGENSTEIN

1.1 Lernergebnisse

Nach dem Durcharbeiten dieses Studienbriefes kennen Sie die grundlegenden Regeln der Arithmetik. Sie haben die wichtigsten arithmetischen Gesetze, namentlich das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, verstanden und können diese anwenden. Zudem können Sie mit Brüchen und Dezimalbrüchen umgehen. Insbesondere sind Sie dazu in der Lage, einen Bruch in eine andere Darstellungsform zu überführen. Weiterhin können Sie mit Fakultäten sowie mit Summen- und Produktzeichen rechnen.

1.2 Zahlen

In der Mathematik wurden immer wieder neue Mengen definiert. Die wichtigsten Mengen werden in diesem Abschnitt beschrieben.

Natürliche Zahlen

Ausgangspunkt war die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

D

Definition 1.1: Natürliche Zahlen

Die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen. Das Element 0 ist nicht in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten. Es gilt: $0 \notin \mathbb{N}$. Die Menge der natürlichen Zahlen inklusive dem Element 0 wird mit \mathbb{N}_0 bezeichnet.

Es seien a und b natürliche Zahlen, also $a, b \in \mathbb{N}$. Dann besitzt nicht jede Gleichung der Form $a + x = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

B

Beispiel 1.1: Mit der Menge der natürlichen Zahlen unlösbare Gleichung

Sei etwa $a = 5$ und $b = 3$, so ist die Gleichung $5 + x = 3$ mit einer Zahl $x \in \mathbb{N}$ nicht lösbar.

Ganze Zahlen

Um solche Gleichungen, wie $5 + x = 3$ lösen zu können, wurden die ganzen Zahlen eingeführt.

D

Definition 1.2: Ganze Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ heißt die Menge der ganzen Zahlen. In aufzählender Schreibweise gilt

$$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.1)$$

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so kann jede Gleichung der Form $a + x = b$ mit $x \in \mathbb{Z}$ gelöst werden, denn es gilt $x = b - a$. Die Lösung x ist dann für gegebene $a, b \in \mathbb{Z}$ eindeutig. Jedoch die Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ist im Allgemeinen nicht mit einer ganzen Zahl x lösbar.

B

Beispiel 1.2: Mit der Menge der ganzen Zahlen unlösbare Gleichung

Die Gleichung $2 \cdot x = 1$ ist mit einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ nicht lösbar.

Rationale Zahlen

Die Mathematiker erweiterten daher die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} zu einer neuen Menge, die mit \mathbb{Q} bezeichnet wird. \mathbb{Q} heißt die Menge der rationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen werden üblicherweise durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben.

Definition 1.3: Rationale Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.2)$$

heißt die Menge der rationalen Zahlen .

D

Die Definition $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ ist nicht zulässig, da eine Division durch 0 nicht zulässig ist.

In der Form von Gleichung (1.2) sind aber nicht alle Elemente unterschiedlich. Denn es gilt $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$. Für jede rationale Zahl gibt es also unendlich viele Darstellungen. Eine eindeutige Darstellung wird durch das Kürzen von gemeinsamen Faktoren in Zähler und Nenner erreicht, bis keine gemeinsamen Teiler größer als 1 existieren. Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Zähler und Nenner ist dann 1. Die abgekürzte Schreibweise hierfür lautet $\text{ggT}(m, n) = 1$, oder noch kürzer $(m, n) = 1$. Daher gilt

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \right\}. \quad (1.3)$$

In Gleichung (1.3) wird jede rationale Zahl eindeutig dargestellt.

In \mathbb{Q} sind nun alle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ eindeutig lösbar. Es gilt $x = \frac{b}{a}$. Damit ist \mathbb{Q} die kleinste unendliche Menge, in der wie gewohnt mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, \cdot und $:$ gerechnet werden kann.

Neben \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q} gibt es noch weitere wichtige Mengen, denn eine Gleichung der Form $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{N}$ ist im Allgemeinen nicht mit einer rationalen Zahl x lösbar.

Beispiel 1.3: Mit der Menge der rationalen Zahlen unlösbare Gleichung

In der Literatur wird das Beispiel $a = 2$ häufig behandelt: Da die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ besitzt, folgt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere bekannte Zahlen, die nicht in \mathbb{Q} liegen, sind die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e .

B

Reelle Zahlen

Die wichtige Menge, die alle rationalen Zahlen, alle Zahlen der Form \sqrt{x} mit positivem $x \in \mathbb{Q}$ sowie Zahlen wie π und e enthält, ist die Menge der reellen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen wird mit \mathbb{R} bezeichnet. An dieser Stelle kann weder durch eine explizite Angabe noch durch eine Beschreibung der Eigenschaften von reellen Zahlen die Menge \mathbb{R} definiert werden. Auch dies ist ein Indiz, wie schwierig formale Mengenlehre ist. Allerdings haben die meisten Menschen eine konkrete Vorstellung davon, was eine reelle Zahl ist. Eine einfache Interpretation aller positiven reellen Zahlen sind Längen: Haben wir zwei verschiedene Punkte gegeben, so gibt es eine positive reelle Zahl, deren Wert gleich dem Abstand der beiden Punkte ist. Durch Hinzunahme der Null und der negativen reellen Zahlen erhält man so die Menge \mathbb{R} .

Komplexe Zahlen

Aber auch in \mathbb{R} sind nicht alle Gleichungen lösbar. Bereits die einfache Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine reelle Lösung. In der Mathematik wird eine Lösung dieser Gleichung mit i bezeichnet. Sie heißt die *imaginäre Einheit*, da i nicht in unserem Anschauungsraum liegt.

M

Merksatz 1.1

In der Elektrotechnik wird die Wechselstromstärke mit i bezeichnet. Aus diesem Grund wird die imaginäre Einheit in verschiedenen Literaturen auch mit dem Bezeichner j versehen.

D

Definition 1.4: Komplexe Zahlen

Die Menge

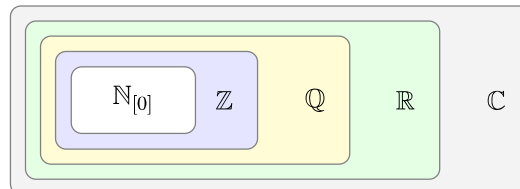
$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.4)$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen.

Eine wichtige Eigenschaft der komplexen Zahlen ist, dass jede Gleichung mit komplexen Koeffizienten in \mathbb{C} lösbar ist. Mit der Menge \mathbb{C} wurde zunächst das letzte Beispiel für eine Menge eingeführt.

Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Zahlenmengen gilt zusammenfassend:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



K

Kontrollaufgabe 1.1: Mengen der Zahlen

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

(a) $4 \in \mathbb{Q}$

(b) $0 \in \mathbb{N}$

(c) $-5 \in \mathbb{Z}$

(d) $0.3 \in \mathbb{Q}$

(e) $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Z}$

(f) $-3 \in \mathbb{Q}$

(g) $0.7 \in \mathbb{Q}$

(h) $0 \in \mathbb{N}_0$

(i) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

(j) $\pi \notin \mathbb{Q}$

(k) $e \in \mathbb{Z}$

(l) $-9 \notin \mathbb{N}$

Kontrollaufgabe 1.2: Mengen der Zahlen

Notieren Sie je zwei Zahlen, die zur folgenden Zahlenmengen gehören:

- a) ... sie ist eine ganze Zahl und eine natürliche Zahl
- b) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl, aber keine natürliche Zahl
- c) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl
- d) ... sie ist eine rationale Zahl und eine natürliche Zahl, aber keine echt gebrochene Zahl
- e) ... sie ist eine natürliche Zahl und eine ganze Zahl mit einem Betrag kleiner als 7

K

1.3 Grundlegende Rechenregeln

In diesem Abschnitt lernen Sie die grundlegenden Regeln der Arithmetik kennen. Hierunter fallen das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz sowie das Distributivgesetz. Diese Rechenregeln werden innerhalb dieses Abschnitts für natürliche Zahlen \mathbb{N} , ganze Zahlen \mathbb{Z} , rationale Zahlen \mathbb{Q} sowie reelle Zahlen \mathbb{R} angewendet.

1.3.1 Kommutativgesetz

Kommutativgesetz

Das *Kommutativgesetz* findet bei Additionen und Multiplikationen seine Anwendung. Es besagt, dass die Summanden bei der Summenbildung bzw. die Faktoren bei der Produktbildung vertauscht werden können, ohne das Ergebnis der Rechenoperation zu beeinflussen. Es wird daher auch als *Vertauschungsgesetz* bezeichnet.

S

Satz 1.1: Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Für die Addition und Multiplikation zweier reeller Zahlen a und b (also $a, b \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

B

Beispiel 1.4: Kommutativgesetz

- $2 + 3 = 3 + 2 = 5$
- $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$
- $-2 + 3 = 3 + (-2) = 1$
- $-2 \cdot 3 = 3 \cdot (-2) = -6$

1.3.2 Assoziativgesetz

Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* erlaubt es, bei Additionen und Multiplikationen mit mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren beliebig Klammern zu setzen. Grundsätzlich werden bei Rechenoperationen die in Klammern gesetzten Terme bevorzugt bearbeitet. Da die Summen- und Produktbildung jedoch unabhängig davon ist, in welcher Reihenfolge die Summanden bzw. Faktoren addiert bzw. multipliziert werden, können Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Ergebnis zu beeinflussen. Das Setzen von Klammern verbindet einzelne Summanden bzw. Faktoren zu einem Teilterm der Rechenoperation, der bevorzugt bearbeitet wird. Daher wird dieses arithmetische Gesetz auch als *Verbindungsgesetz* bezeichnet.

S

Satz 1.2: Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

Für die Addition und Multiplikation von drei reellen Zahlen (also $a, b, c \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

Beispiel 1.5: Assoziativgesetz

- $3 + (2 + 5) = 3 + (7) = 10$ ist identisch zu $(3 + 2) + 5 = (5) + 5 = 10$
- $3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot (10) = 30$ ist identisch zu $(3 \cdot 2) \cdot 5 = (6) \cdot 5 = 30$

B

Bitte beachten Sie, dass beim Assoziativgesetz **nicht** die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren geändert wird, sondern lediglich die Reihenfolge deren arithmetischer Bearbeitung (also von links nach rechts bzw. von rechts nach links).

1.3.3 Distributivgesetz

Das Distributivgesetz legt fest, wie mit der Multiplikation von Summen umzugehen ist. Dabei spielt das Auflösen der Summenklammer eine essenzielle Rolle. Grundsätzlich besagt das Distributivgesetz, dass anstatt einer Summe auch dessen einzelne Summanden mit einem Faktor multipliziert werden können. Da beim Auflösen der Summenklammer der multiplizierende Faktor auf beide Summanden verteilt wird, wird diese Rechenregel auch als Verteilungsgesetz bezeichnet.

Distributivgesetz

Satz 1.3: Distributivgesetz

Für die drei Zahlen a, b und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

S

Beispiel 1.6: Distributivgesetz

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 + 5) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (8) &= (6) + (10) \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

B

Auflösen von Klammern

Steht ein $+$ vor der Klammer, bleiben beim Auflösen der Klammer die Vorzeichen innerhalb der Klammer unverändert.

$$25 + (-15 + 10) = 25 + (-5) \Rightarrow 25 - 15 + 10 = 25 - 5 \Rightarrow 20 = 20$$

Steht ein $-$ vor der Klammer, werden beim Auflösen der Klammer die Vorzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt.

$$28 - (-16 + 4) = 28 - (-12) \Rightarrow 28 + 16 - 4 = 28 + 12 \Rightarrow 40 = 40$$

Vereinfachte Schreibweise verschiedener Vorzeichen bei Multiplikation

$$\begin{aligned} (+2) \cdot (+3) &= +6 \\ (+2) \cdot (-3) &= -6 \\ (-2) \cdot (+3) &= -6 \\ (-2) \cdot (-3) &= +6 \end{aligned}$$

K

Kontrollaufgabe 1.3: Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz

Setzen Sie Klammern und wenden Sie wenn nötig das Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz an, so dass die Rechnung einfach durchzuführen ist.

(a) $556 + 732 - 244 + 378 + 268$

(b) $82 - 429 + 218 + 529$

(c) $273 + 658 + 327 + 442 + 105$

(d) $44 + 943 + 103 + 558 + 257$

(e) $14645 + 368 - 345$

(f) $45 \cdot (1542 + 468)$

1.4 Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

Ein Bruch besteht aus einem Zähler und einem Nenner, die durch einen Bruchstrich voneinander getrennt sind. Der grundsätzliche Aufbau eines Bruches ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Man unterscheidet zwischen echten, unechten und gemischten Brüchen.

echter Bruch Ein echter Bruch zeichnet sich dadurch aus, dass der Zähler kleiner als der Nenner ist. Er gibt den Bruchteil eines Ganzen an, weshalb sein Dezimalwert stets kleiner 1 ist.

Beispiel: $\frac{1}{8} = 0,125$

unechter Bruch Bei einem unechten Bruch hingegen ist der Zähler größer als der Nenner. Dementsprechend ist der Dezimalwert eines unechten Bruchs stets größer 1.

Beispiel: $\frac{17}{8} = 2,125$

gemischter Bruch Ein gemischter Bruch ist eine besondere Darstellungsform des unechten Bruchs. Der unechte Bruch wird dabei in eine ganze Zahl und einen echten Bruch aufgeteilt.

Beispiel: $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

Unechte und gemischte Brüche lassen sich ineinander überführen. Die Umwandlung eines unechten Bruchs in einen gemischten Bruch erfolgt durch eine ganzzahlige Division mit Rest. Der Rest wird dabei als echter Bruch dargestellt. Umgekehrt erfolgt die Umrechnung eines gemischten in einen unechten Bruch über die folgende Formel:

$$\frac{\text{Ganze Zahl} \cdot \text{Nenner} + \text{Zähler}}{\text{Nenner}} \quad (1.5)$$

Beispiel 1.7: Umwandeln unechter und gemischter Brüche

unechter Bruch \Rightarrow gemischter Bruch:

$$\frac{17}{8} = \frac{16}{8} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{8} = 2\frac{1}{8} \quad \text{ganzzahlige Division mit Rest}$$

gemischter Bruch \Rightarrow unechter Bruch:

$$2\frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 1}{8} = \frac{16 + 1}{8} = \frac{17}{8} \quad \text{Anwendung von Formel (1.1)}$$

B

Kontrollaufgabe 1.4: Unechten und gemischten Brüche

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

a) $\frac{32}{16}$

d) $2\frac{2}{9}$

b) $\frac{7}{3}$

e) $3\frac{2}{5}$

c) $\frac{13}{7}$

f) $7\frac{2}{11}$

K

1.4.1 Erweitern eines Bruches

Satz 1.4: Erweitern eines Bruches

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit der Zahl n erweitert, indem sowohl Zähler als auch Nenner mit der Zahl n multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad (1.6)$$

wobei $n \neq 0$ gilt.

S

Beispiel 1.8: Erweitern eines Bruches

Beide nachfolgenden Brüche werden mit der Zahl 5 erweitert

- $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$

- $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

B

1.4.2 Kürzen eines Bruches

S

Satz 1.5: Kürzen eines Bruches

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit reellen Zahlen a, b wird mit der Zahl $n \in \mathbb{R}, n \neq 0$ gekürzt, indem der Zähler und Nenner durch die Zahl n dividiert wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \quad (1.7)$$

B

Beispiel 1.9: Kürzen eines Bruches

Beide nachfolgenden Brüche werden mit der Zahl 2 gekürzt

- $\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{12} = \frac{2 : 2}{12 : 2} = \frac{1}{6}$

1.4.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

S

Satz 1.6: Addition und Subtraktion von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ addiert oder subtrahiert, indem die Nenner beider Brüche durch Kürzen oder Erweitern gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \quad (1.8)$$

wobei $b \cdot d \neq 0$ gilt.

B

Beispiel 1.10: Addition und Subtraktion von Brüchen

- $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$
- $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

K

Kontrollaufgabe 1.5: Addition und Subtraktion von Brüchen

Addieren oder Subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie das Endergebnis, wenn möglich.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{2}{11} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{12} + \frac{7}{9}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{11}{36}$

c) $\frac{4}{15} + \frac{2}{3}$

f) $\frac{1}{8} - \frac{4}{20}$

1.4.4 Multiplikation von Brüchen

Satz 1.7: Multiplikation von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ multipliziert, indem jeweils die Zähler und Nenner beider Brüche miteinander multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.9)$$

S

Beispiel 1.11: Multiplikation von Brüchen

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

B

Kontrollaufgabe 1.6: Multiplikation von Brüchen

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie das Endergebnis, wenn möglich.

- a) $\frac{1}{3} \cdot 9$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}$
- b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{14}$

K

1.4.5 Kehrwertbildung

Der Kehrwert eines Bruches wird für die Division von Brüchen benötigt. Er ergibt sich, indem Zähler und Nenner eines Bruches miteinander vertauscht werden. Der Kehrwert ist demnach wie folgt definiert:

Kehrwert

Definition 1.5: Kehrwert

Der Kehrwert eines Bruches $\frac{a}{b}$ ergibt sich durch Vertauschen von Zähler und Nenner zu $\frac{b}{a}$. Jede ganze Zahl c lässt sich ebenfalls als Bruch der Form $\frac{c}{1}$ darstellen. Mit Ausnahme von Null ergibt sich daher der Kehrwert jeder ganzen Zahl c allgemein zu $\frac{1}{c}$.

D

Beispiel 1.12: Kehrwert

- Der Kehrwert von $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ lautet $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$
- Der Kehrwert von $c = 5 = \frac{c}{1} = \frac{5}{1}$ lautet $\frac{1}{c} = \frac{1}{5}$

B

1.4.6 Division von Brüchen (Doppelbruch)

S

Satz 1.8: Division von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch den Bruch $\frac{c}{d}$ dividiert, indem er mit dessen Kehrwert multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (1.10)$$

B

Beispiel 1.13: Division von Brüchen

- $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$
- $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

K

Kontrollaufgabe 1.7: Division von Brüchen

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{3}{10} : 9$

c) $\frac{1}{8} : \frac{4}{20}$

b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

1.5 Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Summenzeichen
Produktzeichen

Zur Berechnung von Summen und Produkten beliebig vieler Summanden bzw. Faktoren können das Summenzeichen Σ und das Produktzeichen Π verwendet werden.

1.5.1 Summenzeichen

S

Satz 1.9: Summenzeichen

Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so wird die Summe der Zahlen a_k, \dots, a_n mit

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + \dots + a_n$$

bezeichnet. Der Index i heißt Summationsindex.

Funktion des Summationsindex

Der Summationsindex i kann bei der Summenbildung sowohl als Index der Summanden als auch als Summand selber fungieren:

- i im Index der Summanden $\Rightarrow \sum_{i=k}^n a_i$

- i als Summand selber $\Rightarrow \sum_{i=k}^n i$

Im ersten Fall müssen die Summanden a_i explizit definiert sein, um den Wert der Summe berechnen zu können. Im zweiten Fall hingegen entsprechen die Summanden den Werten des Summationsindex i . Der Summenwert ist daher unmittelbar berechenbar. Der Unterschied soll durch die folgenden Beispiele verdeutlicht werden:

- $\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3 = 6$

Beispiel 1.14: Summenzeichen

In folgender Tabelle seien den Indizes $i = 1, 2, \dots, 6$ verschiedene Werte $a_i = a_1, a_2, \dots, a_6$ zugeordnet:

i	1	2	3	4	5	6
a_i	2	4	3	2	3	7

Gefragt sei die Summe der Tabellenwerte, denen die Indizes von $i = 2$ bis $i = 5$ zugeordnet sind. Die Summationsgrenzen reichen demnach von $k = 2$ bis $n = 5$. Die gefragte Summe lässt sich somit wie folgt berechnen:

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=2}^5 a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

B

Kontrollaufgabe 1.8: Summenzeichen

Berechnen Sie die Summe aller Werte der Tabelle aus Beispiel 1.11.

K

Spezialfälle

Ist die untere Summationsgrenze gleich der oberen, so besteht die Summe nur aus einem Summanden.

Satz 1.10: Spezialfälle bei Summenzeichen

Seien $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $i = k$, dann ist

$$\sum_{i=k}^k a_i = a_k$$

S

Ist hingegen die untere Summationsgrenze größer als die obere, so beträgt das Ergebnis der Summe 0. Diese Summe heißt leere Summe.

S

Satz 1.11: Spezialfälle bei Summenzeichen

Seien $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$, dann ist

$$\sum_{i=k}^n a_i = 0.$$

Rechenregeln

S

Satz 1.12: Konstanter Wert von Summen

Wird über einen konstanten Wert c aufsummiert, der unabhängig vom Summationsindex i ist, so gilt:

$$\sum_{i=k}^n c = (n - k + 1) \cdot c$$

B

Beispiel 1.15: Konstanter Wert von Summen

Gefragt sei der Wert der Summe $\sum_{i=3}^6 4$.

$$\sum_{i=k}^n c = (n - k + 1) \cdot c$$

$$\sum_{i=3}^6 4 = (6 - 3 + 1) \cdot 4$$

$$4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 4$$

$$16 = 16$$

K

Kontrollaufgabe 1.9: Rechenregeln bei Summen

Schreiben Sie den Wert der Summe

$$\sum_{i=-10}^{-8} \lambda$$

aus.

S

Satz 1.13: Konstanter Faktor in Summen

Sei c ein konstanter Faktor innerhalb der Summe $\sum_{i=k}^n c \cdot a_i$ und unabhängig

vom Summationsindex i , so lässt sich der Faktor vor das Summenzeichen ziehen:

$$\sum_{i=k}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=k}^n a_i$$

Beispiel 1.16: Konstanter Faktor in Summen

Gefragt sei der Wert der Summe $\sum_{i=-4}^{-1} 4i$.

$$\sum_{i=-4}^{-1} 4i = 4 \sum_{i=-4}^{-1} i$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) &= 4 \cdot (-4 + (-3) + (-2) + (-1)) \\ -16 + (-12) + (-8) + (-4) &= 4 \cdot (-10) \\ -40 &= -40 \end{aligned}$$

B

Wie aus den Rechenregeln für die Addition und Subtraktion bekannt, sind für Summen alle üblichen Rechenregeln erlaubt. So können zwei Summen zu einer zusammengefasst werden, wenn die oberen und unteren Grenzen beider Summationen übereinstimmen.

Satz 1.14: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i)$$

S

Beispiel 1.17: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge

Wir berechnen den Wert der Summe $\sum_{i=7}^9 \frac{i}{2} + \sum_{i=7}^9 \frac{i}{4}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=7}^9 \frac{i}{2} + \sum_{i=7}^9 \frac{i}{4} &= \sum_{i=7}^9 \left(\frac{i}{2} + \frac{i}{4} \right) \\ \left(\frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} \right) + \left(\frac{7}{4} + \frac{8}{4} + \frac{9}{4} \right) &= \left(\left(\frac{7}{2} + \frac{7}{4} \right) + \left(\frac{8}{2} + \frac{8}{4} \right) + \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{4} \right) \right) \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

B

Weiterhin können einzelne Summanden von der Summe abgespalten werden. Dafür ist jedoch eine Anpassung der Summationsgrenzen erforderlich.

Satz 1.15: Abspalten einzelner Summanden

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n-2} a_i + a_{n-1} + a_n$$

S

B

Beispiel 1.18: Abspalten einzelner Summanden

Gefragt sei die Summe aller Werte a_i aus der folgenden Tabelle:

i	1	2	3	4	5
a_i	2	1	3	4	1

Dabei lassen sich beispielhaft der erste ($i = 1$) und der letzte Summand ($i = 5$) wie folgt von der Summe abspalten:

$$\sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + a_4}_{11} + a_5 = 2 + 1 + 3 + 4 + 1 = 11$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + \sum_{i=2}^4 a_i + a_5 = 2 + (1 + 3 + 4) + 1 = 11$$

Bei der Anwendung der vorgestellten Regeln zum Rechnen mit Summenzeichen unterlaufen häufig Fehler, die zu falschen Zwischen- oder Endergebnissen führen können. Im Folgenden sind häufig angewandte Umformungen aufgelistet, die unzulässig sind und die es somit zu vermeiden gilt.

Unzulässige Umformungen In Verbindung mit Summenzeichen

- $\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$ für $n > 1$
- $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$
- $\sum_{i=1}^n (a_i - c) \neq \sum_{i=1}^n a_i - c$

1.5.2 Produktzeichen

S

Satz 1.16: Produktzeichen

Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so wird das Produkt der Zahlen a_k, \dots, a_n mit

$$\prod_{i=k}^n a_i = a_k \cdot \dots \cdot a_n.$$

bezeichnet. Der Index i heißt Multiplikationsindex.

B

Beispiel 1.19: Produktzeichen

- $\prod_{i=1}^5 i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
- $\prod_{i=4}^6 i^2 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$

Kontrollaufgabe 1.10: Produktzeichen

Berechnen Sie Summe von $\prod_{i=5}^8 i$

K

Spezialfälle

Ist die untere Multiplikationsgrenze größer als die obere, so beträgt das Ergebnis des Produkts 1.

Satz 1.17: Spezialfall bei Produktzeichen

Seien $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$, dann ist

$$\prod_{i=k}^n a_i = 1.$$

S

1.5.3 Indexverschiebung

Die Grenzen von Summen können geändert werden, indem der ursprüngliche Summationsindex *substituiert* wird. Bei einer Indexverschiebung wird eine ganze Zahl zum Summenindex addiert oder subtrahiert um die weitere Rechnung mit den Summen oder Produkten zu vereinfachen.

Indexverschiebung

Satz 1.18: Indexverschiebung

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{a-a} + a_{1+a-a} + \dots + a_{n+a-a} = \sum_{j=a}^{n+a} a_{j-a} \text{ für } a \in \mathbb{Z}$$

S

Vorgehensweise der Indexverschiebung

1. Festlegung der Schritte um wieviele der Index verschoben werden soll
2. Durchführung Indexverschiebung mit \pm -Anzahl der Schritte (Index nach links: Ersetze jede Laufvariable durch $+$; Index nach rechts: Ersetze jede Laufvariable durch $-$)
3. Fasse Summe zusammen

Beispiel 1.20: Indexverschiebung

Wir verschieben den Index der $\sum_{i=3}^5 \frac{4i+2}{2}$ von $i = 3$ auf $i = 1$ wie folgt:

Um den Index von $i = 3$ auf $i = 1$ zu verschieben, sind 2 Schritte nötig. Demnach wird die Laufvariable i durch $i + 2$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^5 \frac{4i+2}{2} &= \sum_{(i+2)=3}^{(i+2)=5} \frac{4(i+2)+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{4(i+2)+2}{2} \end{aligned}$$

B

Im letzten Schritt fassen wir die Summe zusammen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{i=5} \frac{4i+2}{2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{4(i+2)+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{4i+8+2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{4i+10}{2}\end{aligned}$$

K

Kontrollaufgabe 1.11: Indexverschiebung

Verschieben Sie den Index der Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ auf $k = 5$.

1.6 Rechnen mit Fakultäten

In der Analysis, der Kombinatorik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der Statistik wird häufig mit Fakultäten gerechnet. Es handelt sich hierbei um ein spezielles Produkt der Form:

Fakultät

D

Definition 1.6: Fakultät

Die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ heißt n -Fakultät. Es gilt $0! := 1$.

S

Satz 1.19: Berechnung der Fakultät

Die Berechnung erfolgt mithilfe des Produktzeichens. Es gilt:

$$n! = \prod_{i=1}^n k = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Es gilt $(n+1)! = n!(n+1)$ für $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

B

Beispiel 1.21: Berechnung der Fakultät

Wir berechnen den Wert von $5!$:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

B

Beispiel 1.22: Kürzen der Fakultät

Kürzen Sie den Ausdruck $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)}$

Der Ausdruck $(n+2)!$ kann gemäß der Definition 1.6 wie folgt umgeschrieben werden: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!}{n! \cdot (n+2)} &= \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n! \cdot (n+2)} \\ &= n+1\end{aligned}$$

Kontrollaufgabe 1.12: Fakultät

Berechnen Sie den Wert $\frac{4!}{6!}$.

K

1.7 Übungsaufgaben

Ü

Übung 1.1: Unechte und gemischte Brüche

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

a) $\frac{15}{4}$

d) $5\frac{3}{4}$

b) $\frac{9}{2}$

e) $\frac{11}{2}$

c) $6\frac{1}{8}$

f) $\frac{2}{3}$

Ü

Übung 1.2: Addition und Subtraktion von Brüchen

Addieren oder subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{2}{9} + \frac{7}{5}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{11} + \frac{3}{5}$

f) $\frac{23}{27} - \frac{2}{23}$

Ü

Übung 1.3: Multiplikation von Brüchen

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{3}{11} \cdot \frac{12}{33}$

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{7}$

b) $\frac{2}{5} \cdot 3$

Ü

Übung 1.4: Division von Brüchen

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) $\frac{3}{8} : \frac{6}{12}$

c) $\frac{7}{21} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{5} : \frac{4}{10}$

Ü

Übung 1.5: Arithmetik

Berechnen Sie den jeweiligen Wert des Terms:

a) $-(2 - (3 + 4 - (5 - (2 + 3))))$

b) $2 \cdot (3 + 4) - 1 \cdot (4 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot (4 - 2))$

c) $1\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{20} \cdot 2\frac{1}{2}\right)$

$$d) \frac{2}{8}$$

Übung 1.6: Summenzeichen

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{i=2}^4 (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1})$

Ü

Übung 1.7: Summen- und Produktzeichen

Berechnen Sie $A = \prod_{i=2}^3 a_i - \sum_{i=1}^3 a_i$, wenn $a_1 = 2, a_2 = 3$ und $a_3 = 5$ gilt.

Ü

Übung 1.8: Indexverschiebung

Führen Sie eine geeignete Indexverschiebung durch und berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{v=2}^{23} (v-1)^2 + \sum_{\mu=-2}^{19} 2(\mu+3) + \sum_{k=10}^{31} 1$.

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Ü

Übung 1.9: Fakultät

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{(n-1)! \cdot n^2}{n!}$.

Ü

Liste der Lösungen zu den Kontrollaufgaben**Lösung zu Kontrollaufgabe 1.1 auf Seite 22**

Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

- (a) $4 \in \mathbb{Q}$ ist wahr (b) $0 \in \mathbb{N}$ ist falsch
(c) $-5 \in \mathbb{Z}$ ist wahr (d) $0.3 \in \mathbb{Q}$ ist wahr
(e) $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Z}$ ist falsch (f) $-3 \in \mathbb{Q}$ ist wahr
(g) $0.7 \in \mathbb{Q}$ ist wahr (h) $0 \in \mathbb{N}_0$ ist wahr
(i) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ist falsch (j) $\pi \notin \mathbb{Q}$ ist wahr
(k) $e \in \mathbb{Z}$ ist falsch (l) $-9 \notin \mathbb{N}$ ist wahr

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.2 auf Seite 23

Notieren Sie je zwei Zahlen, die zur folgenden Zahlenmengen gehören:

- a) ... sie ist eine ganze Zahl und eine natürliche Zahl: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
b) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl, aber keine natürliche Zahl:
-1, -2, -3, ...
c) ... sie ist eine rationale Zahl und eine ganze Zahl: 1, 2, 3, 4, 5, ...
d) ... sie ist eine rationale Zahl und eine natürliche Zahl, aber keine echt gebrochene Zahl: Es gibt keine Zahlen, die diese Bedingung erfüllen.
e) ... sie ist eine natürliche Zahl und eine ganze Zahl mit einem Betrag kleiner als 7: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.3 auf Seite 26

Setzen Sie Klammern und wenden Sie wenn nötig das Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz an, so dass die Rechnung einfach durchzuführen ist.

- a) $556 + 732 - 244 + 378 + 268 = (732 + 378) + ((556 - 244) + 268) = 1110 + (312 + 268) = 1110 + 580 = 1690$
b) $82 - 429 + 218 + 529 = (82 + 218) + (529 - 429) = 300 + 100 = 400$
c) $273 + 658 + 327 + 442 + 105 = (273 + 327) + (658 + 442) + 105 = 600 + 1100 + 105 = 1805$
d) $44 + 943 + 103 + 558 + 257 = (943 + 257) + (44 + 103) + 558 = 1200 + 147 + 558 = 1905$
e) $14645 + 368 - 345 = (14645 - 345) + 368 = 14300 + 368 = 14668$
f) $45 \cdot (1542 + 468) = 45 \cdot (2010) = 90450$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.4 auf Seite 27

Wandeln Sie die unechten und gemischten Brüche entsprechend um.

$$a) \frac{32}{16} = 2$$

$$d) 2\frac{2}{9} = \frac{20}{9}$$

$$b) \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$e) 3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$c) \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$$

$$f) 7\frac{2}{11} = \frac{79}{11}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.5 auf Seite 28

Addieren oder Subtrahieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$b) \frac{1}{12} + \frac{7}{9} = \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{3}{36} + \frac{28}{36} = \frac{31}{36}$$

$$c) \frac{4}{15} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15} + \frac{10}{15} = \frac{14}{15}$$

$$d) \frac{2}{11} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{11 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{6}{33} - \frac{11}{33} = -\frac{5}{33}$$

$$e) \frac{1}{2} - \frac{11}{36} = \frac{1 \cdot 18}{2 \cdot 18} - \frac{11}{36} = \frac{18}{36} - \frac{11}{36} = \frac{7}{36}$$

$$f) \frac{1}{8} - \frac{4}{20} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{5}{40} - \frac{8}{40} = -\frac{3}{40}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.6 auf Seite 29

Multiplizieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$$a) \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b) \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{14} = \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 1}{8 \cdot 2} = \frac{7}{16}$$

$$c) \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 9} = \frac{2}{27}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.7 auf Seite 30

Dividieren Sie die folgenden Brüche. Kürzen Sie, wenn möglich.

$$a) \frac{3}{10} : 9 = \frac{3}{10} : \frac{9}{1} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{10 \cdot 3} = \frac{1}{30}$$

$$b) \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$c) \frac{1}{8} : \frac{4}{20} = \frac{1}{8} \cdot \frac{20}{4} = \frac{1 \cdot 20}{8 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 1} = \frac{5}{8}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.8 auf Seite 31

Berechnen Sie Summe aller Werte der Tabelle aus Beispiel 1.11:

$$\sum_{i=1}^6 a_i = 2 + 4 + 3 + 2 + 3 + 7 = 21$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.9 auf Seite 32

Schreiben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=-10}^{-8} \lambda$ aus.

$$\sum_{i=-10}^{-8} \lambda = \lambda + \lambda + \lambda$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.10 auf Seite 35

Berechnen Sie Summe von $\prod_{i=5}^8 i$:

$$\prod_{i=5}^8 i = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.11 auf Seite 36

Verschieben Sie den Index der Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ auf $k = 5$.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=5}^{n+4} a_{k-4}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 1.12 auf Seite 37

Berechnen Sie den Wert $\frac{4!}{6!}$.

$$\begin{aligned} \frac{4!}{6!} &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{6 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Lösung zu Kontrollaufgabe 2.1 auf Seite 43

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

- a) $3 \nmid 7$ ist wahr
- b) $198 \mid 22$ ist falsch
- c) $266 \nmid 19$ ist wahr

Verzeichnisse

I. Abbildungen

Abb. 2.1	Kryptologie im Alltag [siehe 4, Seite 3]	41
Abb. 2.2	schriftliche Division ohne Rest	44
Abb. 2.3	schriftliche Division mit Rest	44
Abb. 2.4	Georg Cantor	49
Abb. 2.5	Schnittmenge $M \cap N$	51
Abb. 2.6	Differenzmenge $M \setminus N$ und $N \setminus M$	51
Abb. 2.7	Symmetrische Differenz $M \Delta N$	52
Abb. 2.8	Vereinigungsmenge $M \cup N$	52
Abb. 2.9	Offene Halbebene mit der Randgeraden des Ungleichungssystems $x + 3y < 3 \cdot (x + 1)$	64
Abb. 2.10	Abgeschlossene Halbebene mit der Randgeraden des Ungleichungssystems $x + 3y \geq 3 \cdot (x + 1)$	65
Abb. 2.11	Schaubild der Lösungen	66
Abb. 3.1	Landmarks [2]	77
Abb. 3.2	Strecke, Halbgerade und Gerade	78
Abb. 3.3	Orthogonale Geraden, nicht orthogonale Geraden und parallele Geraden	78
Abb. 3.4	Kartesisches Koordinatensystem	79
Abb. 3.5	Besondere Dreiecke	80
Abb. 3.6	Vierecke	80
Abb. 3.7	Vierecke	81
Abb. 3.8	Rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenquadrat a, b und Hypotenusenquadrat c	82
Abb. 3.9	Rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenquadrat a, b und Hypotenusenquadrat c	83
Abb. 3.10	Rechtwinkliges Dreieck mit Höhenquadrat h und Hypotenusenquadrat c	83
Abb. 3.11	Einheitskreis	85
Abb. 3.12	Kreisbogen, Kreissehne, Kreissektor und Kreissegment	85
Abb. 3.13	Sekante, Tangente und Passante	86
Abb. 3.14	Darstellung des Satz des Thales	86
Abb. 3.15	Kongruente und nicht kongruente Figuren	93
Abb. 3.16	Schritte einer Achsenspiegelung	94
Abb. 3.17	Schritte einer Punktspiegelung	95
Abb. 3.18	Schritte einer Verschiebung	96
Abb. 3.19	Drehung	96
Abb. 3.20	Kongruenzsatz 1: SSS	98
Abb. 3.21	Kongruenzsatz 2: SWS	99
Abb. 3.22	Kongruenzsatz 3: WSW	99
Abb. 3.23	Kongruenzsatz 4: SSW	100
Abb. 3.24	Streckung eines Kreises	101
Abb. 3.25	1. und 2. Strahlensatz	101
Abb. 4.1	ePass	111
Abb. 4.2	Elliptische Kurve $y^2 = x^3 - 6x + 6$	111
Abb. 4.3	Zuordnung in einem Koordinatensystem	112
Abb. 4.4	Wertetabelle einer proportionalen Zuordnung	113
Abb. 4.5	Darstellung der Wertetabelle 4.4 in einem Koordinatensystem	114
Abb. 4.6	Wertetabelle einer antiproportionalen Zuordnung	117
Abb. 4.7	Darstellung der Wertetabelle 4.6 in einem Koordinatensystem	117
Abb. 4.8	Wertetabelle der Funktion $y = 2x$	121
Abb. 4.9	Darstellung der Wertetabelle 4.8 in einem Koordinatensystem	122
Abb. 4.10	Umkehrfunktion \ln von e^x	123
Abb. 4.11	Umkehrfunktion $y = 2x + 2$ von $y = \frac{x}{2} + 1$	124
Abb. 4.12	Darstellung einer linearen Funktion 4.12 in einem Koordinatensystem	125
Abb. 4.13	Darstellung des Achsenabschnitt und Steigungsdreieck einer linearen Funktion 4.13	126
Abb. 4.14	Veränderungen bei linearen Funktionen	126
Abb. 4.15	Darstellung einer quadratischen Funktion in einem Koordinatensystem	128

Abb. 4.16 Quadratische Parabeln mit einem Koeffizienten $a > 0$	128
Abb. 4.17 Quadratische Parabeln mit einem Koeffizienten $a < 0$	129
Abb. 4.18 Kubische Parabeln	130
Abb. 4.19 Gebrochen rationale Funktionen	130
Abb. 4.20 Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse	132
Abb. 4.21 Trigonometrischer Pythagoras im Einheitskreis	138
Abb. 4.22 Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens	139
Abb. 4.23 Besondere Werte der Winkelfunktion \cos und \sin	140
Abb. 4.24 Sinusfunktion	140
Abb. 4.25 Cosinusfunktion	141
Abb. 4.26 Tangensfunktion	141
Abb. 4.27 Cotangensfunktion	142
Abb. 4.28 Lineares und exponentielles Wachstum	143
Abb. 4.29 Exponentialfunktionen	145
Abb. 4.30 Exponentialfunktion e^x	145
Abb. 4.31 Wachstumsverhalten der Exponentialfunktionen	146
Abb. 4.32 Logarithmusfunktion \log , \ln und \lg	148
Abb. 4.33 Wurzelfunktion $\sqrt[n]{x}$	152
Abb. 5.1 Differenzenquotient	161
Abb. 5.2 Ableitung der trigonometrischen Funktion	166
Abb. 5.3 Darstellung des Funktionsgraphen $f(x) = 4x^2 - 12x - 40$ in einem Koordinatensystem mit seinen Nullstellen	170
Abb. 5.4 Symmetrie von Funktionen	179
Abb. 5.5 Arten von Extremstellen	180
Abb. 5.6 Schaubild der Funktionsuntersuchung	185
Abb. 5.7 Aufgabenstellung	186
Abb. 5.8 Flächenberechnung	186
Abb. 5.9 Ergebnis Extremwertaufgabe	187
Abb. 5.10 Funktionsbestimmung [siehe 5, Seite 134]	189
Abb. 5.11 Funktionsbestimmung [siehe 5, Seite 134]	189
Abb. 5.12 Begrenztes Wachstum und begrenzter Zerfall	201

II. Beispiele

Beispiel 1.1: Mit der Menge der natürlichen Zahlen unlösbare Gleichung	20
Beispiel 1.2: Mit der Menge der ganzen Zahlen unlösbare Gleichung	20
Beispiel 1.3: Mit der Menge der rationalen Zahlen unlösbare Gleichung	21
Beispiel 1.4: Kommutativgesetz	24
Beispiel 1.5: Assoziativgesetz	25
Beispiel 1.6: Distributivgesetz	25
Beispiel 1.7: Umwandeln unechter und gemischter Brüche	27
Beispiel 1.8: Erweitern eines Bruches	27
Beispiel 1.9: Kürzen eines Bruches	28
Beispiel 1.10: Addition und Subtraktion von Brüchen	28
Beispiel 1.11: Multiplikation von Brüchen	29
Beispiel 1.12: Kehrwert	29
Beispiel 1.13: Division von Brüchen	30
Beispiel 1.14: Summenzeichen	31
Beispiel 1.15: Konstanter Wert von Summen	32
Beispiel 1.16: Konstanter Faktor in Summen	33
Beispiel 1.17: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge	33
Beispiel 1.18: Abspalten einzelner Summanden	34
Beispiel 1.19: Produktzeichen	34
Beispiel 1.20: Indexverschiebung	35
Beispiel 1.21: Berechnung der Fakultät	36

Beispiel 1.22: Kürzen der Fakultät	36
Beispiel 2.1: Zweierpotenzen	42
Beispiel 2.2: Quersummen	43
Beispiel 2.3: Sonstige Teilbarkeitsregeln	43
Beispiel 2.4: Modulo	44
Beispiel 2.5: Primfaktorenzerlegung	46
Beispiel 2.6: Größter gemeinsamer Teiler	46
Beispiel 2.7: Euklidischer Algorithmus	47
Beispiel 2.8: Kleinstes gemeinsames Vielfaches	47
Beispiel 2.9: Kleinstes gemeinsames Vielfaches	48
Beispiel 2.10: Terme mit Variablen	54
Beispiel 2.11: Ersetzen einer Variablen durch einen Zahlenwert	54
Beispiel 2.12: Multiplikationen von Termen	55
Beispiel 2.13: Äquivalenzumformung einer Gleichung	55
Beispiel 2.14: Äquivalenzumformung einer Ungleichung	56
Beispiel 2.15: Ausmultiplizieren	57
Beispiel 2.16: 1. binomische Formel	57
Beispiel 2.17: Ausmultiplizieren	57
Beispiel 2.18: 2. binomische Formel	58
Beispiel 2.19: Ausmultiplizieren	58
Beispiel 2.20: 3. binomische Formel	58
Beispiel 2.21: Lineare Gleichung	59
Beispiel 2.22: Lineare Ungleichungen	59
Beispiel 2.23: Gleichsetzungsverfahren	60
Beispiel 2.24: Additionsverfahren	61
Beispiel 2.25: Einsetzungsverfahren	62
Beispiel 2.26: Lineares Ungleichungssystem	63
Beispiel 2.27: Lineares Ungleichungssystem	64
Beispiel 2.28: Lineares Ungleichungssystem	65
Beispiel 2.29: Potenz	66
Beispiel 2.30: Rechenregeln für Potenzen	67
Beispiel 2.31: Potenz a^0	67
Beispiel 2.32: Umwandlung der Potenz der Form a^{-n}	67
Beispiel 2.33: Wurzel	68
Beispiel 2.34: Rechenregeln für Wurzeln	68
Beispiel 2.35: Wert der Diskriminante	70
Beispiel 2.36: Wurzelgleichungen	71
Beispiel 3.1: Kongruenzsatz SSS	98
Beispiel 3.2: Kongruenzsatz SWS	98
Beispiel 3.3: Kongruenzsatz WSW	99
Beispiel 3.4: Kongruenzsatz SSW	100
Beispiel 4.1: Zuordnung	112
Beispiel 4.2: Proportionalitätsfaktor	114
Beispiel 4.3: Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen	115
Beispiel 4.4: Gesamtgröße	118
Beispiel 4.5: Dreisatz bei antiproportionaler Zuordnung	118
Beispiel 4.6: Zusammengesetzte Zuordnungen	119
Beispiel 4.7: Zusammengesetzte Zuordnungen	120
Beispiel 4.8: Wertetabelle	121
Beispiel 4.9: Umkehrfunktion	122
Beispiel 4.10: Ganzrationale Funktionen	125
Beispiel 4.11: Steigung einer linearen Funktion	127
Beispiel 4.12: Gebrochenrationale Funktionen	130
Beispiel 4.13: Sinus	132
Beispiel 4.14: Cosinus	133
Beispiel 4.15: Tangens	133
Beispiel 4.16: Umwandlung Grad in Bogenmaß	135

Beispiel 4.17: Umwandlung Bogenmaß in Grad	136
Beispiel 4.18: Sinussatz	138
Beispiel 4.19: Cosinussatz	139
Beispiel 4.20: Funktionswerte der Sinusfunktion	140
Beispiel 4.21: Funktionswerte der Cosinusfunktion	141
Beispiel 4.22: Funktionswerte der Tangensfunktion	142
Beispiel 4.23: Funktionswerte der Cotangensfunktion	142
Beispiel 4.24: Linearer Zuwachs	143
Beispiel 4.25: Exponentieller Zuwachs	144
Beispiel 4.26: Logarithmusfunktion	147
Beispiel 4.27: Rechenregeln der Logarithmen	147
Beispiel 4.28: Umrechnung des Logarithmus zur Basis a in Basis b	148
Beispiel 4.29: Exponentialgleichungen	149
Beispiel 4.30: Exponentialgleichungen	149
Beispiel 4.31: Exponentialgleichungen	150
Beispiel 4.32: Exponentialgleichungen	150
Beispiel 4.33: Entlogarithmierung	151
Beispiel 4.34: Logarithmusgleichungen	151
Beispiel 4.35: Logarithmusgleichungen	151
Beispiel 5.1: Grenzwert von \sqrt{x} an der Stelle $x_0 = 3$	158
Beispiel 5.2: Grenzwert von $\sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$	158
Beispiel 5.3: Berechnung des uneigentlichen Grenzwertes der Hyperbel	159
Beispiel 5.4: Uneigentliche Grenzwertbetrachtung von e^x	159
Beispiel 5.5: Stetigkeit einer Funktion	160
Beispiel 5.6: Bestimmung der Sekantensteigung	161
Beispiel 5.7: Ableitung einer Potenzfunktion	163
Beispiel 5.8: Ableitung mithilfe der Faktorregel	164
Beispiel 5.9: Ableitung mithilfe der Summenregel	164
Beispiel 5.10: Ableitung mithilfe der Produktregel	164
Beispiel 5.11: Ableitung mithilfe der Quotientenregel	165
Beispiel 5.12: Ableitung mithilfe der Kettenregel	165
Beispiel 5.13: Quadratische Ergänzung	171
Beispiel 5.14: pq-Formel	172
Beispiel 5.15	172
Beispiel 5.16: Auflösen	172
Beispiel 5.17: Substitution bi-quadratischer Funktionen	173
Beispiel 5.18: Nullstellenberechnung mittels Polynomdivision	174
Beispiel 5.19: Polynomdivision mittels Hornerchema	177
Beispiel 5.20: Berechnung von Extremstellen	179
Beispiel 5.21: Berechnung von Wendestellen	181
Beispiel 5.22: Nullstellenberechnung mittels Linearfaktorenzerlegung	182
Beispiel 5.23: Vollständige Funktionsuntersuchung	183
Beispiel 5.24: Extremwertaufgabe	186
Beispiel 5.25: Steckbriefaufgabe	188
Beispiel 5.26: Steckbriefaufgabe	190
Beispiel 5.27: Darstellung einer Funktionsschar	194
Beispiel 5.28: Darstellung einer Funktionsschar	194
Beispiel 5.29: Untersuchung einer Funktionsschar	195
Beispiel 5.30: Berechnung der Wachstumsgeschwindigkeit	200
Beispiel 5.31: Begrenztes Wachstum	202
Beispiel 5.32: Berechnung der Größe des Anfangsbestandes	202

III. Definitionen

Definition 0.1: Wurzelfunktion	17
--	----

Definition 1.1:	Natürliche Zahlen	20
Definition 1.2:	Ganze Zahlen	20
Definition 1.3:	Rationale Zahlen	21
Definition 1.4:	Komplexe Zahlen	22
Definition 1.5:	Kehrwert	29
Definition 1.6:	Fakultät	36
Definition 2.1:	Teiler	42
Definition 2.2:	Primzahl	45
Definition 2.3:	Teilerfremd	46
Definition 2.4:	Kleinstes gemeinsames Vielfaches	47
Definition 2.5:	Menge	49
Definition 2.6:	Ordnung	50
Definition 2.7:	Teilmenge	50
Definition 2.8:	Schnittmenge	51
Definition 2.9:	Differenzmenge	51
Definition 2.10:	Vereinigungsmenge	52
Definition 2.11:	Potenz	66
Definition 2.12:	Wurzel	68
Definition 3.1:	Kongruenzsatz SSS	98
Definition 3.2:	Kongruenzsatz SWS	98
Definition 3.3:	Kongruenzsatz WSW	99
Definition 3.4:	Kongruenzsatz SSW	99
Definition 4.1:	Zuordnung	112
Definition 4.2:	Proportionale Zuordnung	113
Definition 4.3:	Antiproportionale Zuordnung	116
Definition 4.4:	Funktion	121
Definition 4.5:	Umkehrfunktion	122
Definition 4.6:	Ganzrationale Funktionen	124
Definition 4.7:	Normalform einer Geraden	125
Definition 4.8:	Trigonometrische Pythagoras	136
Definition 4.9:	Linearer Zuwachs	143
Definition 4.10:	Exponentieller Zuwachs	144
Definition 4.11:	Exponentialfunktion	144
Definition 4.12:	Logarithmusfunktion	147
Definition 4.13:	Wurzelfunktion	152
Definition 5.1:	Grenzwert an der Stelle x_0	158
Definition 5.2:	Uneigentlicher Grenzwert	158
Definition 5.3:	Stetigkeit	159
Definition 5.4:	Differenzierbarkeit	162
Definition 5.5:	Ableitungsfunktion	163
Definition 5.6:	Nullstellen	169
Definition 5.7:	Achsensymmetrie	179
Definition 5.8:	Punktsymmetrie	179
Definition 5.9:	Differentialgleichung	198
Definition 5.10:	Lineares Wachstum	198

IV. Kontrollaufgaben

Kontrollaufgabe 1.1:	Mengen der Zahlen	22
Kontrollaufgabe 1.2:	Mengen der Zahlen	23
Kontrollaufgabe 1.3:	Kommutativ-, Assoziativ oder das Distributivgesetz	26
Kontrollaufgabe 1.4:	Unechten und gemischten Brüche	27
Kontrollaufgabe 1.5:	Addition und Subtraktion von Brüchen	28
Kontrollaufgabe 1.6:	Multiplikation von Brüchen	29
Kontrollaufgabe 1.7:	Division von Brüchen	30

Kontrollaufgabe 1.8:	Summenzeichen	31
Kontrollaufgabe 1.9:	Rechenregeln bei Summen	32
Kontrollaufgabe 1.10:	Produktzeichen	35
Kontrollaufgabe 1.11:	Indexverschiebung	36
Kontrollaufgabe 1.12:	Fakultät	37
Kontrollaufgabe 2.1:	Teilbarkeitsregeln	43
Kontrollaufgabe 2.2:	Teilbarkeitsregeln	43
Kontrollaufgabe 2.3:	Modulo-Rechnung	45
Kontrollaufgabe 2.4:	Primzahlen	45
Kontrollaufgabe 2.5:	Primfaktorenzerlegung	46
Kontrollaufgabe 2.6:	ggT und kgV	48
Kontrollaufgabe 2.7:	Euklidischer Algorithmus	48
Kontrollaufgabe 2.8:	Bestimmung der Mengen	52
Kontrollaufgabe 2.9:	Bestimmung der Vereinigungsmenge, Schnittmenge und Komplementmenge	53
Kontrollaufgabe 2.10:	Terme und Variablen	55
Kontrollaufgabe 2.11:	Gleichungen	56
Kontrollaufgabe 2.12:	Ungleichungen	56
Kontrollaufgabe 2.13:	Binomische Formeln	58
Kontrollaufgabe 2.14:	Lineare Gleichungen	59
Kontrollaufgabe 2.15:	Lineare Ungleichungen	60
Kontrollaufgabe 2.16:	Lösen von Gleichungssystemen	63
Kontrollaufgabe 2.17:	Lösen von Ungleichungssystemen	66
Kontrollaufgabe 2.18:	Potenzen	67
Kontrollaufgabe 2.19:	Wurzel	69
Kontrollaufgabe 2.20:	Reelle Lösungen einer quadratischen Gleichung	71
Kontrollaufgabe 2.21:	Wurzelgleichung	72
Kontrollaufgabe 3.1:	Satz des Pythagoras	84
Kontrollaufgabe 3.2:	Durchmesser und Radius	84
Kontrollaufgabe 3.3:	Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren	90
Kontrollaufgabe 3.4:	Berechnung des Umfangs ebener Figuren	93
Kontrollaufgabe 3.5:	Spiegelungen	96
Kontrollaufgabe 3.6:	Kongruenzsätze	100
Kontrollaufgabe 3.7:	Zentrische Streckung	100
Kontrollaufgabe 3.8:	Strahlensätze	102
Kontrollaufgabe 3.9:	Umrechnung Volumen	107
Kontrollaufgabe 4.1:	Proportionale Zuordnung	116
Kontrollaufgabe 4.2:	Antiproportionale Zuordnung	119
Kontrollaufgabe 4.3:	Zusammengesetzte Zuordnungen	121
Kontrollaufgabe 4.4:	Wertetabelle und Umkehrfunktion	124
Kontrollaufgabe 4.5:	Ganzrationale Funktionen höheren Grades	131
Kontrollaufgabe 4.6:	Trigonometrische Funktionen	134
Kontrollaufgabe 4.7:	Bogen- oder Gradmaß	136
Kontrollaufgabe 4.8:	Winkelfunktionen	142
Kontrollaufgabe 4.9:	Exponentialfunktion	146
Kontrollaufgabe 4.10:	Logarithmusfunktion	148
Kontrollaufgabe 4.11:	Berechnung von Logarithmen	149
Kontrollaufgabe 4.12:	Exponential- oder Logarithmusgleichungen	151
Kontrollaufgabe 4.13:	Wurzelfunktion	152
Kontrollaufgabe 5.1:	Grenzwertbestimmung	159
Kontrollaufgabe 5.2:	Steigung	162
Kontrollaufgabe 5.3:	Ableitung	169
Kontrollaufgabe 5.4:	Kettenregel	169
Kontrollaufgabe 5.5:	Abspaltung eines Linearfaktors	176
Kontrollaufgabe 5.6:	Horner-Schemas	178
Kontrollaufgabe 5.7:	Funktionsuntersuchung	185
Kontrollaufgabe 5.8:	Minima und Maxima	187
Kontrollaufgabe 5.9:	Funktionsbestimmung	192

Kontrollaufgabe 5.10: Funktionsschar	198
Kontrollaufgabe 5.11: Bestimmung des Wachstums	203

V. Sätze

Satz 0.1: Der große Satz von Fermat	16
Satz 0.2	16
Satz 1.1: Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	24
Satz 1.2: Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	24
Satz 1.3: Distributivgesetz	25
Satz 1.4: Erweitern eines Bruches	27
Satz 1.5: Kürzen eines Bruches	28
Satz 1.6: Addition und Subtraktion von Brüchen	28
Satz 1.7: Multiplikation von Brüchen	29
Satz 1.8: Division von Brüchen	30
Satz 1.9: Summenzeichen	30
Satz 1.10: Spezialfälle bei Summenzeichen	31
Satz 1.11: Spezialfälle bei Summenzeichen	32
Satz 1.12: Konstanter Wert von Summen	32
Satz 1.13: Konstanter Faktor in Summen	32
Satz 1.14: Additionen und Subtraktionen von Summen gleicher Länge	33
Satz 1.15: Abspalten einzelner Summanden	33
Satz 1.16: Produktzeichen	34
Satz 1.17: Spezialfall bei Produktzeichen	35
Satz 1.18: Indexverschiebung	35
Satz 1.19: Berechnung der Fakultät	36
Satz 2.1: Modulo	44
Satz 2.2: Primfaktorenzerlegung	45
Satz 2.3: Größter gemeinsamer Teiler	46
Satz 2.4: 1. binomische Formel	57
Satz 2.5: 2. binomische Formel	58
Satz 2.6: 3. binomische Formel	58
Satz 2.7: Lineare Gleichung	59
Satz 2.8: Rechenregeln für Potenzen	67
Satz 2.9: Rechenregeln für Wurzeln	68
Satz 2.10: Quadratische Gleichung	69
Satz 2.11: Normalform einer quadratischen Gleichung	69
Satz 2.12: pq-Formel	69
Satz 3.1: Satz des Pythagoras	81
Satz 3.2: Kathetensatz von Euklid	82
Satz 3.3: Höhensatz von Euklid	83
Satz 3.4: 1. Strahlensatz	101
Satz 3.5: 2. Strahlensatz	102
Satz 4.1: Proportionalitätsfaktor	114
Satz 4.2: Gesamtgröße	117
Satz 4.3: Steigung einer linearen Funktion	126
Satz 4.4: Hauptform einer Parabel	127
Satz 4.5: Normalform einer Parabel	128
Satz 4.6: Hauptform einer kubischen Funktion	129
Satz 4.7: Hauptform einer gebrochenrationalen Funktion	130
Satz 4.8: Sinus	132
Satz 4.9: Cosinus	133
Satz 4.10: Tangens	133
Satz 4.11: Cotangens	134
Satz 4.12: Bogenmaß	135

Satz 4.13: Gradmaß	136
Satz 4.14: Sinussatz	137
Satz 4.15: Cosinussatz	138
Satz 4.16: Rechenregeln der Logarithmen	147
Satz 5.1: Differentialquotient	161
Satz 5.2: Faktorregel	163
Satz 5.3: Summenregel	164
Satz 5.4: Produktregel	164
Satz 5.5: Quotientenregel	165
Satz 5.6: Kettenregel	165
Satz 5.7: Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion	167
Satz 5.8: Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion	168
Satz 5.9: Quadratische Ergänzung	170
Satz 5.10: pq-Formel	171
Satz 5.11: Linearfaktoren	174
Satz 5.12: Extremwert	179
Satz 5.13: Wendestelle	181
Satz 5.14: Exponentielles Wachstum	199
Satz 5.15: Halbierungszeit bzw. Verdoppelungszeit	200
Satz 5.16: Wachstumsgeschwindigkeit	200
Satz 5.17: Sättigungsmanko	201
Satz 5.18: Exponentielles Wachstum	201

VI. Tabellen

Tabelle 5.1 Erste Ableitung der elementaren Funktionen [siehe 12, Seite 131]	163
Tabelle 5.2 Formulierungshilfen zur Funktionsbestimmung	188

VII. Literatur

- [1] Ilja N. Bronstein und Konstantin A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 7 edition, 2008. ISBN 978-3-8171-2017-8.
- [2] Christoph Busch. 3d face recogniton, 2011.
- [3] Das Bundesministerium des Innern. Der neue Personalausweis. http://www.personalausweisportal.de/SharedDocs/Bilder/DE/Ausweis_stehend.jpg?__blob=poster&v=6, 2011.
- [4] Das Cryptool Team. Asymmetrische Kryptologie am Beispiel RSA entdecken. https://www.cryptportal.org/data/Asymmetrische%20Kryptologie%20am%20Beispiel%20RSA%20entdecken_v1.1.pdf, January 2010.
- [5] Heinz Griesel, Andreas Gundlach, Helmut Postel, und Friedrich Suhr. *Elemente der Mathematik - EdM*. Schroedel, Braunschweig, 1 edition, 2011. ISBN 978-3-507-87954-6.
- [6] Dawn Griffiths. *Statistik von Kopf bis Fuss: Ein Buch zum Mitmachen und Verstehen*. O'Reilly, Beijing and and Cambridge and Köln and Sebastopol and Taipei and Tokyo, 2009. ISBN 978-3-89721-891-8.
- [7] Günter Grundmann. Biometrische verfahren im prüfungslabor. http://www.tuer-tor-report.com/uploads/images/14_01_d_TTF_1_07.jpg, 2007.
- [8] Hammer, Prokop, Voit, und Quaritsch. Latex@tug. <http://latex.tugraz.at>.

- [9] Günter Hanisch, Hans-Christian Reichel, Robert Müller, und Sonja Schak. *Mathematik für HLA 1*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH & Co KG, Wien, 2006. ISBN 978-3-230-02652-1.
- [10] Rainer Maroska, Achim Olpp, Claus Stöckle, und Hartmut Wellstein. *Schnittpunkt Mathematik Rheinland-Pfalz*. Klett-Verlag, 2004. ISBN 978-3-12-741760-9.
- [11] Rainer Maroska, Achim Olpp, Rainer Pongs, Claus Stöckle, Hartmut Wellstein, und Heiko Wontroba. *Schnittpunkt - Mathematik für Realschulen*. Klett, Stuttgart and Leipzig, 1. auflage edition, 2010. ISBN 978-3-12-742601-4.
- [12] Lothar Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Mit zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel*. Vieweg, Wiesbaden, 9 edition, 2006. ISBN 978-3-8348-0156-2.
- [13] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 13 edition, 2011. ISBN 978-3-8348-1749-5.
- [14] August Schmid und Wilhelm Schweizer. *Analysis: Grundkurs ; Gesamtausg.* Klett Schulbuchverl, Stuttgart, 1 edition, 1990. ISBN 3-12-739640-6.
- [15] Bruce Schneier. *Angewandte Kryptographie - Der Klassiker: Protokolle, Algorithmen und Sourcecode in C*. Pearson Addison Wesley, Chichester, 2006. ISBN 0471117099.
- [16] Symantec Corporation. Symantec intelligence report: January 2012. http://www.symanteccloud.com/de/de/mlireport/SYMCINT_2012_01_January_FINAL_DE.pdf, 2011.
- [17] Symantec Corporation. Internet security threat report volume 16. http://www.symantec.com/content/en/us/enterprise/other_resources/b-istr_main_report_2011_21239364.en-us.pdf, 2012.
- [18] Gerald Teschl und Susanne Teschl. *Mathematik für Informatiker: Band 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin and Heidelberg, 3 edition, 2008. ISBN 978-3540774310.
- [19] Olivier Thonnard und Marc Dacier. A strategic analysis of spam botnets operations. In *Proceedings of the 8th Annual Collaboration, Electronic messaging, Anti-Abuse and Spam Conference, CEAS '11*, pages 162–171, New York, NY, USA, 2011. ACM. ISBN 978-1-4503-0788-8. doi: 10.1145/2030376.2030395. URL <http://doi.acm.org/10.1145/2030376.2030395>.
- [20] Jochen Herling und Karl-Heinz Kuhlmann und Uwe Scheele und Wilhelm Wilke. *Mathematik: Schülerband 8*. Westermann, Braunschweig, 1 edition, 2009. ISBN 3141218285.
- [21] Claudia Eckert und Michael Herfert. Innovative lösungen mit dem elektronischen personalausweis - der darmstädter campuspilot. http://www.sec.in.tum.de/assets/lehre/ss09/sms/Eckert_ePA.pdf, 2009.
- [22] Pang-Ning Tan und Michael Steinbach und Vipin Kumar. *Introduction to data mining*. Pearson Addison Wesley, Boston, 1 edition, 2005. ISBN 0321321367.
- [23] A. Uthor. *Testing*. 2012.

Anhang

A. Lizenztext



Creative Commons Legal Code

Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland



CREATIVE COMMONS IST KEINE RECHTSANWALTSKANZLEI UND LEISTET KEINE RECHTSBERATUNG. DIE BEREITSTELLUNG DIESER LIZENZ FÜHRT ZU KEINEM MANDATSVERHÄLTNIS. CREATIVE COMMONS STELLT DIESE INFORMATIONEN OHNE GEWÄHR ZUR VERFÜGUNG. CREATIVE COMMONS ÜBERNIMMT KEINE GEWÄHRLEISTUNG FÜR DIE GELIEFERTEN INFORMATIONEN UND SCHLIEßT DIE HAFTUNG FÜR SCHÄDEN AUS, DIE SICH AUS DEREN GEBRAUCH ERGEBEN.

Lizenz

DER GEGENSTAND DIESER LIZENZ (WIE UNTER "SCHUTZGEGENSTAND" DEFINIERT) WIRD UNTER DEN BEDINGUNGEN DIESER CREATIVE COMMONS PUBLIC LICENSE ("CCPL", "LIZENZ" ODER "LIZENZVERTRAG") ZUR VERFÜGUNG GESTELLT. DER SCHUTZGEGENSTAND IST DURCH DAS URHEBERRECHT UND/ODER ANDERE GESETZE GESCHÜTZT. JEDE FORM DER NUTZUNG DES SCHUTZGEGENSTANDES, DIE NICHT AUFGRUND DIESER LIZENZ ODER DURCH GESETZE GESTATTET IST, IST UNZULÄSSIG.

DURCH DIE AUSÜBUNG EINES DURCH DIESE LIZENZ GEWÄHRTEN RECHTS AN DEM SCHUTZGEGENSTAND ERKLÄREN SIE SICH MIT DEN LIZENZBEDINGUNGEN RECHTSVERBINDLICH EINVERSTANDEN. SOWEIT DIESE LIZENZ ALS LIZENZVERTRAG ANZUSEHEN IST, GEWÄHRT IHNEN DER LIZENZGEBER DIE IN DER LIZENZ GENANNTEN RECHTE UNENTGELTLICH UND IM AUSTAUSCH DAFÜR, DASS SIE DAS GEBUNDENSEIN AN DIE LIZENZBEDINGUNGEN AKZEPTIEREN.

1. Definitionen

- a. Der Begriff "**Abwandlung**" im Sinne dieser Lizenz bezeichnet das Ergebnis jeglicher Art von Veränderung des Schutzgegenstandes, solange die eigenpersönlichen Züge des Schutzgegenstandes darin nicht verblassen und daran eigene Schutzrechte entstehen. Das kann insbesondere eine Bearbeitung, Umgestaltung, Änderung, Anpassung, Übersetzung oder Heranziehung des Schutzgegenstandes zur Vertonung von Laufbildern sein. Nicht als Abwandlung des Schutzgegenstandes gelten seine Aufnahme in eine Sammlung oder ein Sammelwerk und die freie Benutzung des Schutzgegenstandes.
- b. Der Begriff "**Sammelwerk**" im Sinne dieser Lizenz meint eine Zusammenstellung von literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalten, sofern diese Zusammenstellung aufgrund von Auswahl und Anordnung der darin enthaltenen selbständigen Elemente eine geistige Schöpfung darstellt, unabhängig davon, ob die Elemente systematisch oder methodisch angelegt und dadurch einzeln zugänglich sind oder nicht.
- c. "**Verbreiten**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, den Schutzgegenstand oder Abwandlungen im Original oder in Form von Vervielfältigungsstücken, mithin in körperlich fixierter Form der Öffentlichkeit anzubieten oder in Verkehr zu bringen.
- d. Unter "**Lizenzelementen**" werden im Sinne dieser Lizenz die folgenden übergeordneten Lizenzcharakteristika verstanden, die vom Lizenzgeber ausgewählt wurden und in der Bezeichnung der Lizenz zum Ausdruck kommen: "Namensnennung", "Weitergabe unter gleichen Bedingungen".
- e. Der "**Lizenzgeber**" im Sinne dieser Lizenz ist diejenige natürliche oder juristische Person oder Gruppe, die den Schutzgegenstand unter den Bedingungen dieser Lizenz anbietet und insoweit als Rechteinhaberin auftritt.
- f. "**Rechteinhaber**" im Sinne dieser Lizenz ist der Urheber des Schutzgegenstandes oder jede andere natürliche oder juristische Person oder Gruppe von Personen, die am Schutzgegenstand ein Immaterialgüterrecht erlangt hat, welches die in Abschnitt 3 genannten Handlungen erfasst und bei dem eine Einräumung von Nutzungsrechten oder eine Weiterübertragung an Dritte möglich ist.
- g. Der Begriff "**Schutzgegenstand**" bezeichnet in dieser Lizenz den literarischen, künstlerischen oder wissenschaftlichen Inhalt, der unter den Bedingungen dieser Lizenz angeboten wird. Das kann insbesondere eine persönliche geistige Schöpfung jeglicher Art, ein Werk der kleinen Münze, ein nachgelassenes Werk oder auch ein Lichtbild oder anderes Objekt eines verwandten Schutzrechts sein, unabhängig von der Art seiner Fixierung und unabhängig davon, auf welche Weise jeweils eine Wahrnehmung erfolgen kann, gleichviel ob in analoger oder digitaler Form.

Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, unterfallen auch sie dem Begriff "Schutzgegenstand" im Sinne dieser Lizenz.

- h. Mit "**Sie**" bzw. "**Ihnen**" ist die natürliche oder juristische Person gemeint, die in dieser Lizenz im Abschnitt 3 genannte Nutzungen des Schutzgegenstandes vornimmt und zuvor in Hinblick auf den Schutzgegenstand nicht gegen Bedingungen dieser Lizenz verstoßen oder aber die ausdrückliche Erlaubnis des Lizenzgebers erhalten hat, die durch diese Lizenz gewährten Nutzungsrechte trotz eines vorherigen Verstoßes auszuüben.
- i. Unter "**Öffentlich Zeigen**" im Sinne dieser Lizenz sind Veröffentlichungen und Präsentationen des Schutzgegenstandes zu verstehen, die für eine Mehrzahl von Mitgliedern der Öffentlichkeit bestimmt sind und in unkörperlicher Form mittels öffentlicher Wiedergabe in Form von Vortrag, Aufführung, Vorführung, Darbietung, Sendung, Weitersendung, zeit- und ortsunabhängiger Zugänglichmachung oder in körperlicher Form mittels Ausstellung erfolgen, unabhängig von bestimmten Veranstaltungen und unabhängig von den zum Einsatz kommenden Techniken und Verfahren, einschließlich drahtgebundener oder drahtloser Mittel und Einstellen in das Internet.
- j. "**Vervielfältigen**" im Sinne dieser Lizenz bedeutet, mittels beliebiger Verfahren Vervielfältigungsstücke des Schutzgegenstandes herzustellen, insbesondere durch Ton- oder Bildaufzeichnungen, und umfasst auch den Vorgang, erstmals körperliche Fixierungen des Schutzgegenstandes sowie Vervielfältigungsstücke dieser Fixierungen anzufertigen, sowie die Übertragung des Schutzgegenstandes auf einen Bild- oder Tonträger oder auf ein anderes elektronisches Medium, gleichviel ob in digitaler oder analoger Form.
- k. "**Mit Creative Commons kompatible Lizenz**" bezeichnet eine Lizenz, die unter <https://creativecommons.org/compatiblelicenses> aufgelistet ist und die durch Creative Commons als grundsätzlich zur vorliegenden Lizenz äquivalent akzeptiert wurde, da zumindest folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

Diese mit Creative Commons kompatible Lizenz

- i. enthält Bestimmungen, welche die gleichen Ziele verfolgen, die gleiche Bedeutung haben und die gleichen Wirkungen erzeugen wie die Lizenzelemente der vorliegenden Lizenz; und
- ii. erlaubt ausdrücklich das Lizenzieren von ihr unterstellten Abwandlungen unter vorliegender Lizenz, unter einer anderen rechtsordnungsspezifisch angepassten Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen, wie sie die vorliegende Lizenz aufweist, oder unter der entsprechenden Creative-Commons-Unported-Lizenz.

2. Schranken des Immaterialgüterrechts

Diese Lizenz ist in keiner Weise darauf gerichtet, Befugnisse zur Nutzung des Schutzgegenstandes zu vermindern, zu beschränken oder zu vereiteln, die Ihnen aufgrund der Schranken des Urheberrechts oder anderer Rechtsnormen bereits ohne Weiteres zustehen oder sich aus dem Fehlen eines immaterialgüterrechtlichen Schutzes ergeben.

3. Einräumung von Nutzungsrechten

Unter den Bedingungen dieser Lizenz räumt Ihnen der Lizenzgeber - unbeschadet unverzichtbarer Rechte und vorbehaltlich des Abschnitts 3.e) - das vergütungsfreie, räumlich und zeitlich (für die Dauer des Schutzrechts am Schutzgegenstand) unbeschränkte einfache Recht ein, den Schutzgegenstand auf die folgenden Arten und Weisen zu nutzen ("unentgeltlich eingeräumtes einfaches Nutzungsrecht für jedermann"):

- a. Den Schutzgegenstand in beliebiger Form und Menge zu vervielfältigen, ihn in Sammelwerke zu integrieren und ihn als Teil solcher Sammelwerke zu vervielfältigen;
- b. Abwandlungen des Schutzgegenstandes anzufertigen, einschließlich Übersetzungen unter Nutzung jedweder Medien, sofern deutlich erkennbar gemacht wird, dass es sich um Abwandlungen handelt;
- c. den Schutzgegenstand, allein oder in Sammelwerke aufgenommen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten;
- d. Abwandlungen des Schutzgegenstandes zu veröffentlichen, öffentlich zu zeigen und zu verbreiten.
- e. Bezüglich Vergütung für die Nutzung des Schutzgegenstandes gilt Folgendes:
 - i. **Unverzichtbare gesetzliche Vergütungsansprüche:** Soweit unverzichtbare Vergütungsansprüche im Gegenzug für gesetzliche Lizenzen vorgesehen oder Pauschalabgabensysteme (zum Beispiel für Leermedien) vorhanden sind, behält sich der Lizenzgeber das ausschließliche Recht vor, die entsprechende Vergütung einzuziehen für jede Ausübung eines Rechts aus dieser Lizenz durch Sie.
 - ii. **Vergütung bei Zwangslizenzen:** Sofern Zwangslizenzen außerhalb dieser Lizenz vorgesehen sind und zustande kommen, verzichtet der Lizenzgeber für alle Fälle einer lizenzgerechten Nutzung des Schutzgegenstandes durch Sie auf jegliche Vergütung.
 - iii. **Vergütung in sonstigen Fällen:** Bezüglich lizenzgerechter Nutzung des

Schutzgegenstandes durch Sie, die nicht unter die beiden vorherigen Abschnitte (i) und (ii) fällt, verzichtet der Lizenzgeber auf jegliche Vergütung, unabhängig davon, ob eine Einziehung der Vergütung durch ihn selbst oder nur durch eine Verwertungsgesellschaft möglich wäre.

Das vorgenannte Nutzungsrecht wird für alle bekannten sowie für alle noch nicht bekannten Nutzungsarten eingeräumt. Es beinhaltet auch das Recht, solche Änderungen am Schutzgegenstand vorzunehmen, die für bestimmte nach dieser Lizenz zulässige Nutzungen technisch erforderlich sind. Alle sonstigen Rechte, die über diesen Abschnitt hinaus nicht ausdrücklich durch den Lizenzgeber eingeräumt werden, bleiben diesem allein vorbehalten. Soweit Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten Schutzgegenstand dieser Lizenz oder Teil dessen sind und einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen, verzichtet der Lizenzgeber auf sämtliche aus diesem Schutz resultierenden Rechte.

4. Bedingungen

Die Einräumung des Nutzungsrechts gemäß Abschnitt 3 dieser Lizenz erfolgt ausdrücklich nur unter den folgenden Bedingungen:

- a. Sie dürfen den Schutzgegenstand ausschließlich unter den Bedingungen dieser Lizenz verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie müssen dabei stets eine Kopie dieser Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen dieser Lizenz oder die durch diese Lizenz gewährten Rechte beschränken. Sie dürfen den Schutzgegenstand nicht unterlizenzieren. Bei jeder Kopie des Schutzgegenstandes, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise unverändert lassen, die auf diese Lizenz und den Haftungsausschluss hinweisen. Wenn Sie den Schutzgegenstand verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf den Schutzgegenstand) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer des Schutzgegenstandes in der Ausübung der ihm durch diese Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.a) gilt auch für den Fall, dass der Schutzgegenstand einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt dieser Lizenz unterstellt werden muss. Sofern Sie ein Sammelwerk erstellen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin aus dem Sammelwerk die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen. Wenn Sie eine Abwandlung vornehmen, müssen Sie auf die Mitteilung eines Lizenzgebers hin von der Abwandlung die in Abschnitt 4.c) aufgezählten Hinweise entfernen.
- b. Sie dürfen eine Abwandlung ausschließlich unter den Bedingungen
 - i. dieser Lizenz,
 - ii. einer späteren Version dieser Lizenz mit denselben Lizenzelementen,
 - iii. einer rechtsordnungsspezifischen Creative-Commons-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts (z.B. Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 US),
 - iv. der Creative-Commons-Unported-Lizenz mit denselben Lizenzelementen ab Version 3.0 aufwärts, oder
 - v. einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz

verbreiten oder öffentlich zeigen.

Falls Sie die Abwandlung gemäß Abschnitt (v) unter einer mit Creative Commons kompatiblen Lizenz lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen Folge leisten.

Falls Sie die Abwandlungen unter einer der unter (i)-(iv) genannten Lizenzen ("Verwendbare Lizenzen") lizenzieren, müssen Sie deren Lizenzbestimmungen sowie folgenden Bestimmungen Folge leisten: Sie müssen stets eine Kopie der verwendbaren Lizenz oder deren vollständige Internetadresse in Form des Uniform-Resource-Identifier (URI) beifügen, wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen. Sie dürfen keine Vertrags- oder Nutzungsbedingungen anbieten oder fordern, die die Bedingungen der verwendbaren Lizenz oder die durch sie gewährten Rechte beschränken. Bei jeder Abwandlung, die Sie verbreiten oder öffentlich zeigen, müssen Sie alle Hinweise auf die verwendbare Lizenz und den Haftungsausschluss unverändert lassen. Wenn Sie die Abwandlung verbreiten oder öffentlich zeigen, dürfen Sie (in Bezug auf die Abwandlung) keine technischen Maßnahmen ergreifen, die den Nutzer der Abwandlung in der Ausübung der ihm durch die verwendbare Lizenz gewährten Rechte behindern können. Dieser Abschnitt 4.b) gilt auch für den Fall, dass die Abwandlung einen Bestandteil eines Sammelwerkes bildet, was jedoch nicht bedeutet, dass das Sammelwerk insgesamt der verwendbaren Lizenz unterstellt werden muss.

- c. Die Verbreitung und das öffentliche Zeigen des Schutzgegenstandes oder auf ihm aufbauender Abwandlungen oder ihn enthaltender Sammelwerke ist Ihnen nur unter der Bedingung gestattet, dass Sie, vorbehaltlich etwaiger Mitteilungen im Sinne von Abschnitt 4.a), alle dazu gehörenden

Rechtevermerke unberührt lassen. Sie sind verpflichtet, die Rechteinhaberschaft in einer der Nutzung entsprechenden, angemessenen Form anzuerkennen, indem Sie - soweit bekannt - Folgendes angeben:

- i. Den Namen (oder das Pseudonym, falls ein solches verwendet wird) des Rechteinhabers und / oder, falls der Lizenzgeber im Rechtevermerk, in den Nutzungsbedingungen oder auf andere angemessene Weise eine Zuschreibung an Dritte vorgenommen hat (z.B. an eine Stiftung, ein Verlagshaus oder eine Zeitung) ("Zuschreibungsempfänger"), Namen bzw. Bezeichnung dieses oder dieser Dritten;
- ii. den Titel des Inhaltes;
- iii. in einer praktikablen Form den Uniform-Resource-Identifier (URI, z.B. Internetadresse), den der Lizenzgeber zum Schutzgegenstand angegeben hat, es sei denn, dieser URI verweist nicht auf den Rechtevermerk oder die Lizenzinformationen zum Schutzgegenstand;
- iv. und im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes in Übereinstimmung mit Abschnitt 3.b) einen Hinweis darauf, dass es sich um eine Abwandlung handelt.

Die nach diesem Abschnitt 4.c) erforderlichen Angaben können in jeder angemessenen Form gemacht werden; im Falle einer Abwandlung des Schutzgegenstandes oder eines Sammelwerkes müssen diese Angaben das Minimum darstellen und bei gemeinsamer Nennung mehrerer Rechteinhaber dergestalt erfolgen, dass sie zumindest ebenso hervorgehoben sind wie die Hinweise auf die übrigen Rechteinhaber. Die Angaben nach diesem Abschnitt dürfen Sie ausschließlich zur Angabe der Rechteinhaberschaft in der oben bezeichneten Weise verwenden. Durch die Ausübung Ihrer Rechte aus dieser Lizenz dürfen Sie ohne eine vorherige, separat und schriftlich vorliegende Zustimmung des Lizenzgebers und / oder des Zuschreibungsempfängers weder explizit noch implizit irgendeine Verbindung zum Lizenzgeber oder Zuschreibungsempfänger und ebenso wenig eine Unterstützung oder Billigung durch ihn andeuten.

- d. Die oben unter 4.a) bis c) genannten Einschränkungen gelten nicht für solche Teile des Schutzgegenstandes, die allein deshalb unter den Schutzgegenstandsbegriff fallen, weil sie als Datenbanken oder Zusammenstellungen von Daten einen immaterialgüterrechtlichen Schutz eigener Art genießen.
- e. Persönlichkeitsrechte bleiben - soweit sie bestehen - von dieser Lizenz unberührt.

5. Gewährleistung

SOFERN KEINE ANDERS LAUTENDE, SCHRIFTLICHE VEREINBARUNG ZWISCHEN DEM LIZENZGEBER UND IHNEN GESCHLOSSEN WURDE UND SOWEIT MÄNGEL NICHT ARGLISTIG VERSCHWIEGEN WURDEN, BIETET DER LIZENZGEBER DEN SCHUTZGEGENSTAND UND DIE EINRÄUMUNG VON RECHTEN UNTER AUSSCHLUSS JEDLICHER GEWÄHRLEISTUNG AN UND ÜBERNIMMT WEDER AUSDRÜCKLICH NOCH KONKLUDENT GARANTIEEN IRGENDWEISER ART. DIES UMFASST INSBESONDERE DAS FREISEIN VON SACH- UND RECHTSMÄNGELN, UNABHÄNGIG VON DEREN ERKENNBARKEIT FÜR DEN LIZENZGEBER, DIE VERKEHRSFÄHIGKEIT DES SCHUTZGEGENSTANDES, SEINE VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK SOWIE DIE KORREKTHEIT VON BESCHREIBUNGEN. DIESE GEWÄHRLEISTUNGSBESCHRÄNKUNG GILT NICHT, SOWEIT MÄNGEL ZU SCHÄDEN DER IN ABSCHNITT 6 BEZEICHNETEN ART FÜHREN UND AUF SEITEN DES LIZENZGEBERS DAS JEWEILS GENANNT VERSCHULDEN BZW. VERTRETENMÜSSEN EBENFALLS VORLIEGT.

6. Haftungsbeschränkung

DER LIZENZGEBER HAFTET IHNEN GEGENÜBER IN BEZUG AUF SCHÄDEN AUS DER VERLETZUNG DES LEBENS, DES KÖRPERS ODER DER GESUNDHEIT NUR, SOFERN IHM WENIGSTENS FAHRLÄSSIGKEIT VORZUERWENEN IST, FÜR SONSTIGE SCHÄDEN NUR BEI GROBER FAHRLÄSSIGKEIT ODER VORSATZ, UND ÜBERNIMMT DARÜBER HINAUS KEINERLEI FREIWILLIGE HAFTUNG.

7. Erlöschen

- a. Diese Lizenz und die durch sie eingeräumten Nutzungsrechte erlöschen mit Wirkung für die Zukunft im Falle eines Verstoßes gegen die Lizenzbedingungen durch Sie, ohne dass es dazu der Kenntnis des Lizenzgebers vom Verstoß oder einer weiteren Handlung einer der Vertragsparteien bedarf. Mit natürlichen oder juristischen Personen, die Abwandlungen des Schutzgegenstandes oder diesen enthaltende Sammelwerke unter den Bedingungen dieser Lizenz von Ihnen erhalten haben, bestehen nachträglich entstandene Lizenzbeziehungen jedoch solange weiter, wie die genannten Personen sich ihrerseits an sämtliche Lizenzbedingungen halten. Darüber hinaus gelten die Ziffern 1, 2, 5, 6, 7, und 8 auch nach einem Erlöschen dieser Lizenz fort.
- b. Vorbehaltlich der oben genannten Bedingungen gilt diese Lizenz unbefristet bis der rechtliche Schutz für den Schutzgegenstand ausläuft. Davon abgesehen behält der Lizenzgeber das Recht, den Schutzgegenstand unter anderen Lizenzbedingungen anzubieten oder die eigene Weitergabe des Schutzgegenstandes jederzeit einzustellen, solange die Ausübung dieses Rechts nicht einer

Kündigung oder einem Widerruf dieser Lizenz (oder irgendeiner Weiterlizenzierung, die auf Grundlage dieser Lizenz bereits erfolgt ist bzw. zukünftig noch erfolgen muss) dient und diese Lizenz unter Berücksichtigung der oben zum Erlöschen genannten Bedingungen vollumfänglich wirksam bleibt.

8. Sonstige Bestimmungen

- a. Jedes Mal wenn Sie den Schutzgegenstand für sich genommen oder als Teil eines Sammelwerkes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
- b. Jedes Mal wenn Sie eine Abwandlung des Schutzgegenstandes verbreiten oder öffentlich zeigen, bietet der Lizenzgeber dem Empfänger eine Lizenz am ursprünglichen Schutzgegenstand zu den gleichen Bedingungen und im gleichen Umfang an, wie Ihnen in Form dieser Lizenz.
- c. Sollte eine Bestimmung dieser Lizenz unwirksam sein, so bleibt davon die Wirksamkeit der Lizenz im Übrigen unberührt.
- d. Keine Bestimmung dieser Lizenz soll als abbedungen und kein Verstoß gegen sie als zulässig gelten, solange die von dem Verzicht oder von dem Verstoß betroffene Seite nicht schriftlich zugestimmt hat.
- e. Diese Lizenz (zusammen mit in ihr ausdrücklich vorgesehenen Erlaubnissen, Mitteilungen und Zustimmungen, soweit diese tatsächlich vorliegen) stellt die vollständige Vereinbarung zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen in Bezug auf den Schutzgegenstand dar. Es bestehen keine Abreden, Vereinbarungen oder Erklärungen in Bezug auf den Schutzgegenstand, die in dieser Lizenz nicht genannt sind. Rechtsgeschäftliche Änderungen des Verhältnisses zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen sind nur über Modifikationen dieser Lizenz möglich. Der Lizenzgeber ist an etwaige zusätzliche, einseitig durch Sie übermittelte Bestimmungen nicht gebunden. Diese Lizenz kann nur durch schriftliche Vereinbarung zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber modifiziert werden. Derlei Modifikationen wirken ausschließlich zwischen dem Lizenzgeber und Ihnen und wirken sich nicht auf die Dritten gemäß Ziffern 8.a) und b) angebotenen Lizenzen aus.
- f. Sofern zwischen Ihnen und dem Lizenzgeber keine anderweitige Vereinbarung getroffen wurde und soweit Wahlfreiheit besteht, findet auf diesen Lizenzvertrag das Recht der Bundesrepublik Deutschland Anwendung.

Creative Commons Notice

Creative Commons ist nicht Partei dieser Lizenz und übernimmt keinerlei Gewähr oder dergleichen in Bezug auf den Schutzgegenstand. Creative Commons haftet Ihnen oder einer anderen Partei unter keinem rechtlichen Gesichtspunkt für irgendwelche Schäden, die - abstrakt oder konkret, zufällig oder vorhersehbar - im Zusammenhang mit dieser Lizenz entstehen. Unbeschadet der vorangegangenen beiden Sätze, hat Creative Commons alle Rechte und Pflichten eines Lizenzgebers, wenn es sich ausdrücklich als Lizenzgeber im Sinne dieser Lizenz bezeichnet.

Creative Commons gewährt den Parteien nur insoweit das Recht, das Logo und die Marke "Creative Commons" zu nutzen, als dies notwendig ist, um der Öffentlichkeit gegenüber kenntlich zu machen, dass der Schutzgegenstand unter einer CCPL steht. Ein darüber hinaus gehender Gebrauch der Marke "Creative Commons" oder einer verwandten Marke oder eines verwandten Logos bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung von Creative Commons. Jeder erlaubte Gebrauch richtet sich nach der Creative Commons Marken-Nutzungs-Richtlinie in der jeweils aktuellen Fassung, die von Zeit zu Zeit auf der Website veröffentlicht oder auf andere Weise auf Anfrage zugänglich gemacht wird. Zur Klarstellung: Die genannten Einschränkungen der Markennutzung sind nicht Bestandteil dieser Lizenz.

Creative Commons kann kontaktiert werden über <https://creativecommons.org/>.

B. Teilbarkeit

B.1 Sieb des Eratosthenes

Der Algorithmus zum Sieb des Eratosthenes wird verwendet, um die Primzahlen aus einem Zahlenbereich $[a, b]$ herauszufiltern.

Schritt 1: Zahlen von 2 ... 64

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Schritt 2: Lösche Vielfaches von 2

	2	3	4	5	6	7	8	Primz.:
9	10	11	12	13	14	15	16	2
17	18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30	31	32	
33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	
49	50	51	52	53	54	55	56	
57	58	59	60	61	62	63	64	

Schritt 3: Lösche Vielfaches von 3

	2	3	4	5	6	7	8	Primz.:
9	10	11	12	13	14	15	16	2, 3
17	18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30	31	32	
33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	
49	50	51	52	53	54	55	56	
57	58	59	60	61	62	63	64	

Schritt 4: Lösche Vielfaches von 5

	2	3	4	5	6	7	8	Primz.:
9	10	11	12	13	14	15	16	2, 3, 5
17	18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30	31	32	
33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	
49	50	51	52	53	54	55	56	
57	58	59	60	61	62	63	64	

Schritt 5: Lösche Vielfaches von 7

	2	3	4	5	6	7	8	Primz.:
9	10	11	12	13	14	15	16	2, 3, 5, 7
17	18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30	31	32	
33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	
49	50	51	52	53	54	55	56	
57	58	59	60	61	62	63	64	

Schritt 6: Verbleibende Primzahlen

	2	3	4	5	6	7	8	Primz.:
9	10	11	12	13	14	15	16	2, 3, 5, 7, 11,
17	18	19	20	21	22	23	24	13, 17, 19, 23,
25	26	27	28	29	30	31	32	29, 31, 37, 41,
33	34	35	36	37	38	39	40	43, 47, 53, 59,
41	42	43	44	45	46	47	48	61
49	50	51	52	53	54	55	56	
57	58	59	60	61	62	63	64	

Die Schritte müssen nur bis zur Zahl x durchgeführt werden, solange $x \leq \sqrt{b}$. Beispiel: Der Zahlenbereich ist wie folgt angegeben: $[1, 9]$. Die erste zu testende Zahl lautet $x = 1$. Da $x \leq \sqrt{9}$ ist, wird für diese Zahl der Algorithmus angewandt. Erhöht man x um $+1$, so ist die Bedingung $x \leq \sqrt{9}$ weiterhin erfüllt. Nun werden alle Vielfache der Zahl 2 gestrichen. Selbiges Verfahren wird auch auf die Zahl $x = 3$ angewandt. Für die Zahl $x = 4$ ist die Bedingung $x \leq \sqrt{9}$ nicht erfüllt. Sie braucht nicht mehr getestet werden. Die verbleibenden Zahlen können abgelesen werden. Hierbei handelt es sich um Primzahlen.

Stichwörter

Ableitungsfunktion	163	Funktionsgesetz	121
Ableitungsregeln	163	Funktionswert	121
Allgemeine Exponentialfunktion	168	ganzrationale Funktion	129
Exponential- und Logarithmusfunktion ..	166	gebrochenrationale Funktion	129
Natürlichen Exponentialfunktion	167	lineare Funktion	125
Trigonometrische Funktionen	166	quadratische Funktion	127
Achsenabschnitt	126	Umkehrfunktion	122
Ankathete	131	Wertmenge	121
Assoziativgesetz	24	Funktionsbestimmungen	187
Binomische Formel		Funktionsscharen	193
1. Binom	57	Darstellung	194
2. Binom	57	Ortskurve	195
3. Binom	58	Funktionsuntersuchung	
Bogenmaß	135	Extremstellen und Extremwerte	179
Bruchrechnung		Krümmungsverhalten und Wendepunkte	181
Addition	28	Mehrfache Nullstellen	182
Doppelbruch	30	Nullstellen	169
echter Bruch	26	Symmetrie	178
Erweitern	27	Gegenkathete	131
gemischter Bruch	26	Geometrie	
Kehrwert	29	Höhensatz	82
Kürzen	28	Kathetensatz von Euklid	82
Multiplikation	29	Satz des Pythagoras	81
Subtraktion	28	Gerade	78
unechter Bruch	26	orthogonal	78
Differentialgleichung	198	parallel	78
Differentialquotient	160	Gleichungen	55
Differentialrechnung		Diskriminante	69
Faktorregel	163	Lineare Gleichungen	59
Kettenregel	165	Lineare Ungleichungen	59
Produktregel	164	Normalform	69
Quotientenregel	164	Quadratische Gleichungen	69
Summenregel	164	Wurzelgleichung	71
Differenzenquotient	160	Äquivalenzumformung	55
Differenzierbarkeit	162	Grenzwert	158
Distributivgesetz	25	Halbgerade	78
Division		imaginäre Einheit	22
Mit Rest	43	Indexverschiebung	35
Ohne Rest	43	Inklusion	50
Durchmesser	84	Kommutativgesetz	24
Extremwertproblem	185	Kongruenz	93
Fakultät	36	Koordinatensystem	
Flächeninhalt		Abszissenachse	78
Dreieck	87	kartesisch	79
Quadrat	87	Ordinatenachse	78
Rechteck	87	polar	79
Funktion	121	Kreis	
Argument	121	Einheitskreis	85
Definitionsbereich	121	Kreisbogen	85
Definitionsmenge	121	Kreisschnitt	85

Kreissegment	85	Steckbriefaufgabe	190
Kreissehne	85	Steigung	126
Kreis Sektor	85	Steigungsdreieck	125
Kreiszahl	86	Stereometrie	
lineares Gleichungssystem	60	Zylinder	106
Additionsverfahren	61	Stetigkeit	159
Einsetzungsverfahren	62	Strahlensätze	101
Gleichungsverfahren	60	Strecke	78
Lineares Ungleichungssystem	63	Summenzeichen	30
Menge	49	Symmetrie	
Differenz	51	Achsen Spiegelung	93
Differenzmenge	51	Achsensymmetrie	179
disjunkt	51	Drehsymmetrie	96
Durchschnitt	51	Punktsymmetrie	94, 179
echte Teilmenge	50	Verschiebungssymmetrie	95
Element	49	Symmetrieachse	80
Grundmenge	50	Sättigungsmanko	201
Komplement	51	Tangente	86
leere Menge	51	Teilbarkeitsregeln	42
Obermenge	50	Quersummen	42
Ordnung	50	Zweierpotenzen	42
Restmenge	51	Teiler	42
Schnittmenge	51	Euklidischer Algorithmus	47
Teilmenge	50	ggT	46
Vereinigung	52	kgV	47
Vereinigungsmenge	52	Term	54
Modulo	43	Trigonometrie	
Normalform	125	Cosinus	133
Nullstellen		Sinus	131
Abspaltung eines Linearfaktors	174	Tangens	133
Auflösen	172	Trigonometrische Funktionen	
Ausklammern	172	Cosinus	133
Bi-quadratische Funktion	173	Cotangens	134
Horner Schema	176	Sinus	131
pq-Formel	171	Tangens	133
Quadratische Ergänzung	171	Trigonometrischer Pythagoras	136
Parabel		Ungleichungen	
Hauptform	127	Äquivalenzumformung	56
Passante	86	Variable	54
Ploynomfunktionen	124	Verbindungsgesetz	<i>siehe</i> Assoziativgesetz
Potenzen	66	Vertauschungsgesetz	<i>siehe</i> Kommutativgesetz
pq-Formel	69	Verteilungsgesetz	<i>siehe</i> Distributivgesetz
Primzahlen		Wachstumsgeschwindigkeit	200
Primfaktorenzerlegung	45	Wachstumsprozesse	198
Sieb des Erathosthenes	45	Begrenztes Wachstum	201
Produktzeichen	30	Exponentielles Wachstum	199
Quersumme	42	Lineares Wachstum	198
Radius	84	Verdoppelungszeit	200
Satz des Thales	86	Winkelfunktionen	139
Sekante	86	Wurzel	68
Sekantensteigung	161	Kubikwurzel	68
		Quadratwurzel	68
		Zahl	

ganze Zahl	20
komplexe Zahl	22
natürliche Zahl	20
rationale Zahl	20, 21
reelle Zahl	21
Zerfallsprozesse	198
Begrenzter Zerfall	201
Exponentieller Zerfall	199
Halbierungszeit	200
Linearer Zerfall	198
Zuordnung	
Gesamtgröße	117
proportional	113
Zuordnungen	112
antiproportional	116
Produktgleichheit	117
proportional	113
Proportionalitätsfaktor	114
Quotientengleichheit	114
Zusammengesetzt	119
Äquivalenzumformung	55